TEOREMA CAYLEY-HAMILTON ATAS ALJABAR *SUPERTROPICAL*

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

oleh:
SUROYATUL ISNIAH
NRP. 1214 201 012

Tanggal Ujian : 12 Januari 2016
Periode Wisuda : Maret 2016

Disetujui oleh:

Dr. Subiono, M.S. (Pembimbing)
NIP. 19570411 198403 1 001

Dr. Mahmud Yunus, M.Si. (Penguji)
NIP. 19620407 108703 1 005

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. (Penguji)
NIP. 19660414 199102 2 001

Dr. Dieky Adzkiya, M.Si. (Penguji)
NIP.19830517 200812 1 003

Direktur Program Pascasarjana,

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

CAYLEY-HAMILTON THEOREM OVER SUPERTROPICAL ALGEBRA

By : Suroyatul Isniah
Student Identity Number : 1214201012
Supervisor : Dr. Subiono, M.S.

ABSTRACT

Supertropical algebra is semiring endowed with ghost and ghost map. Supertropical algebra is constructed from the extended of tropical algebra, wich tropical algebra structure is semifield and idempotent. In the supertropical algebra every square matrix $A \in M_n(R)$ have a characteristic polinomial $f_A(\lambda)$ is defined by $f_A(\lambda) = \det(\lambda \otimes I \oplus A)$. Cayley-Hamilton theorem shows that every square matrix over supertropical algebra satisfies $f_A(A) \vDash_{gs} [0_R]$. We study the concept of Cayley-Hamilton theorem and try to develop a proof of Cayley-Hamilton theorem by combinatorial. Furthermore, indicated that the Cayley-Hamilton theorem can be used to determine the inverse matrix of a square matrix with matrix requirements is a diagonal matrix size $n \times n$.

Keywords: Supertropical algebra, supertropical matrices, Cayley-Hamilton Theorem, characteristic polynomial, Diagonal matrix.

TEOREMA CAYLEY-HAMILTON ATAS ALJABAR *SUPERTROPICAL*

Nama Mahasiswa	: Suroyatul Isniah
NRP	: 1214 201 012
Dosen Pembimbing	: Dr. Subiono, M.S

ABSTRAK

Aljabar *Supertropical* merupakan semiring dengan ghost bersama suatu pemetaan ghost. Aljabar *Supertropical* dikonstruksi dari suatu perluasan aljabar *tropical*, dimana struktur aljabar *tropical* adalah semiring komutatif yang *semifield* dan idempoten. Dalam aljabar *supertropical* setiap matriks persegi $A \in M_n(R)$ mempunyai polinomial karakteristik $f_A(\lambda)$ yang didefinisikan $f_A(\lambda) = \det(\ \otimes I \oplus A)$. Teorema Cayley-Hamilton menyatakan bahwa suatu matriks A berukuran $n \times n$ atas *supertropical* memenuhi $f_A(A) \vDash_{gs} [0_R]$. Pada penelitian ini membahas tentang konsep dari teorema Cayley-Hamilton dan mengembangkan suatu bukti dari teorema Cayley-Hamilton melalui pendekatan kombinatorik. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa teorema Cayley-Hamilton dapat digunakan untuk menentukan invers matriks dari matriks diagonal berukuran $n \times n$.

Kata kunci : aljabar *supertropical*, matriks *supertropical*, teorema Cayley-Hamilton, polinomial karakteristik

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul "Teorema Cayley-Hamilton atas Aljabar *Supertropical*" ini dengan lancar. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW sebagai *Uswatun Khasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullohu akhsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tesis ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Ir. Tri Yogi Yuwono, DEA selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
2. Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D selaku Direktur Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Dr. Imam Mukhlash S.Si., MT selaku Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
4. Dr. Dra. Mardlijah, MT selaku Dosen Wali yang telah memberikan motivasi, arahan, dan bimbingannya.
5. Dr. Subiono, M.S selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika dan selaku Dosen Pembimbing, yang telah memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
6. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si., Dr. Mahmud Yunus, M.Si dan Dr. Dieky Adzkiya, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan masukan dan juga saran kepada penulis sehingga Tesis ini dapat diselesaikan dengan baik.
7. Seluruh Dosen Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, terimakasih atas seluruh ilmu, nasihat, dan bimbingannya, serta seluruh Staff Administrasi, terima kasih atas segala bantuannya.

8. Any Muanalifah, M.Si yang telah membantu dalam segala hal.
9. Bapak, Ibu, dan keluarga tercinta, yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
10. Teman-teman Pascasarjana Matematika ITS angkatan 2014, terima kasih atas kenangan yang kalian berikan.

Semoga Allah SWT selalu memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tesis ini, Amin.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan kedepannya. Semoga Tesis ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya ilmu matematika, Amin.

Surabaya, 22 Januari 2016

Penulis

DAFTAR TABEL

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konsep semiring mulai diperkenalkan oleh H.S Vandiver tahun 1935 dan sejak saat itu teori semiring telah mengalami perkembangan sampai sekarang. Semiring merupakan bentuk generalisasi dari ring dimana salah satu atau lebih syarat pada ring dihilangkan. Semiring didefinisikan sebagai himpunan tak kosong dengan dua operasi biner (penjumlahan dan perkalian). Terhadap operasi penjumlahan semiring merupakan monoid komutatif, terhadap operasi perkalian merupakan semigrup serta berlakunya sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan (distributif kiri dan kanan).

Suatu semiring komutatif yang mempunyai sifat idempoten dan merupakan *semifield* disebut *semifield* idempoten atau aljabar *tropical* (Litvinov, 2005). Semiring *tropical* $(\mathbb{T},\oplus,\otimes)$ merupakan suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner $\oplus$ mempunyai makna maksimum yaitu $a \oplus b = \max\{a, b\}$ dan $\otimes$ mempunyai makna penjumlahan yaitu $a \otimes b = a + b$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{T}$ (Izhakian, 2008). Salah satu contoh dari aljabar *tropical* adalah aljabar max-plus. Aljabar max-plus merupakan suatu pendekatan untuk menentukan dan menganalisa berbagai sifat sistem pada sebagian kelas Sistem Event Diskrit (SED) yang diuraikan dengan model waktu invariant max-linier (Subiono, 2015). Aljabar max-plus dapat digunakan menyelesaikan persoalan di beberapa bidang seperti teori graf, kombinatorik, teori sistem dan teori antrian (Heidergott, 1999), dan proses stokastik (Baccelli dkk, 2001).

Menurut Izhakian teori aljabar *tropical* banyak digunakan dalam kajian di bidang geometri, akan tetapi ada beberapa keadaan yang sulit untuk menerapkan aljabar tropical. Hal ini membuat para peneliti melakukan penelitian lebih lanjut dengan harapan bisa memenuhi kebutuhan yang belum bisa terpenuhi oleh aljabar *tropical* (Izhakian dkk, 2010).

Semiring *supertropical* dinotasikan $(R, \mathcal{G}_0, v)$ dimana R adalah suatu semiring (dengan elemen satuan 1_R dan elemen nol 0_R), $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \cup \{0_R\}$ adalah suatu ideal dari R disebut dengan ideal ghost dan $v = R \to \mathcal{G}_0$ adalah suatu pemetaan homomorfisma idempoten disebut dengan pemetaan ghost. Untuk setiap $a \in R$ mempunyai $a^v \in \mathcal{G}_0$ yang merupakan elemen ghost. Struktur *supertropical* muncul dari suatu perluasan aljabar *tropical*. (Izhakian dkk, 2010).

Jika diberikan suatu semiring *supertropical* R maka dapat dibentuk suatu himpunan matriks berukuran $n \times n$ atas aljabar *supertropical* dinotasikan dengan $M_n(R)$. Selanjutnya dapat ditentukan invers matriks, matriks *pseudo-invers*, sistem persamaan linier, polinomial karakteristik, nilai eigen serta vektor eigen dari suatu matriks di $M_n(R)$ (Izhakian dkk, 2009).

Pembahasan teorema Cayley-Hamilton akan terkait dengan suatu polinomial karakteristik dari matriks yang diberikan. Dalam aljabar linier menyatakan bahwa setiap matriks persegi $A \in M_{n\times n}$ mempunyai suatu polinomial karakteristik $C_A(\lambda)$ yang didefinisikan $C_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$. Selanjutnya, teorema Cayley-Hamilton menyatakan jika suatu matriks $A \in M_{n\times n}$ maka $C_A(A) = [0]$. Dalam aljabar max-plus karena tidak didefinisikan operasi pengurangan untuk menentukan analogi persamaan karakteristik dilakukan melalui pendekatan fungsi eksponensial e^{sA}, yaitu matriks e^{sA} disubstitusikan pada persamaan det $(\lambda I - A)$.

Dalam aljabar *supertropical* teorema Cayley-Hamilton menyatakan bahwa setiap matriks persegi $A \in M_n(R)$ memenuhi $f_A(\lambda) \vDash_{gs} [0_R]$. Zur izhakian dalam jurnal *"Supertropical Matrix Algebra"* telah memberikan bukti teorema Cayley-Hamilton menggunakan metode graf, sehingga kontribusi dari penelitian tersebut tidak akan mudah untuk mendapatkan hubungan antara teorema Cayley-Hamilton pada aljabar konvensional dan aljabar *tropical*.

Oleh karena itu penulis tertarik melakukan penelitian untuk mengkonstruksi pembuktian teorema Cayley-Hamilton atas aljabar supertropical menggunakan pendekatan kombinatorik dan mencari keterkaitan teorema Cayley-Hamilton untuk menentukan invers matriks atas aljabar *supertropical*. Berkaitan dengan hal tersebut maka pada penelitian ini diusulkan pembahasan mengenai teorema Cayley-Hamilton atas aljabar *supertropical*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam tesis ini adalah bagaimana keberlakuan teorema Cayley-Hamilton atas aljabar *supertropical*?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan pada penelitian ini dibatasi pada matriks yang dibahas adalah matriks persegi atas *supertropical*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian berdasarkan rumusan masalah di atas adalah mengetahui keberlakuan teorema Cayley-Hamilton atas aljabar *supertropical*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini berdasarkan tujuan yang telah dipaparkan adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan analogi pembuktian teorema Cayley-Hamilton pada aljabar *supertropical* dari aljabar konvensional dan aljabar tropical
2. Memperoleh pengetahuan empirik dan memperluas wawasan mengenai aljabar *supertropical*
3. Dapat dijadikan rujukan bagi upaya pengembangan ilmu aljabar dan berguna sebagai referensi dalam kajian terhadap aljabar *supertropical*.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bab ini dibahas beberapa konsep dasar yang akan digunakan untuk membahas pembuktian teorema Cayley-Hamilton pada aljabar *supertropical* dan menentukan keterkaitan matriks *invertible* terhadap teorema Cayley-Hamilton atas aljabar *supertropical*.

2.1 Penelitian yang Pernah Dilakukan

Aljabar *supertropical* merupakan suatu kajian baru dalam ilmu aljabar. Berikut merupakan penelitian-penelitian yang berkaitan dengan aljabar *supertropical*, yaitu: (1) *Supertropical Algebra,* Izhakian (2010) pada jurnal tersebut telah dibahas struktur aljabar *supertropical* yaitu semiring *supertropical*, polinomial *supertropical*, *Nullstellensatz* dan faktorisasi polinomial *supertropical*. (2) *Cramer and Cayley-Hamilton in the Max Algebra,* Olsder (1985) pada jurnal ini telah dibahas tentang aturan Cramer dan teorema Cayley-Hamilton yang dirumuskan dan dibuktikan pada aljabar Max-Plus. Perumusan aturan Cramer dan teorema Cayley-Hamilton pada aljabar Max-plus menyerupai dengan aljabar biasa. Pembuktian pada aljabar biasa operasi tambah diganti dengan maksimum, sedangkan operasi kali diganti dengan operasi tambah. (3) *Characteristic Polynomials of Supertropical Matrices,* Adi Niv (2013) pada jurnal ini telah membahas tentang matriks, nilai eigen, polinomial karakteristik dan koefisien-koefisien polinomial karakteristik dari matriks aljabar *supertropikal.*

Pada tahun berikutnya Adi Niv (2011) melanjutkan penelitian tentang *supertropical* dalam kajian *pseudo-inverse*dari suatu matriks pada jurnal (4) *On Pseudo-inverse of matrices and their Characteristic Polynomials in Supertropical Algebra,* jurnal tersebut telah membahas bahwa suatu matriks persegi A atas aljabar *supertropical* mempunyai *pseudo-inverse* $A^{\nabla} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A$, dengan $\det(A)$ menjadi determinan *tropical* dari matrik A. Jika diberikan matriks B dan B' dikatakan sama secara *tropical* jika $B' = A^{\nabla}BA$, selanjutnya dari suatu pseudo matriks tersebut bisa ditentukan polinomial karakteristik.

Polinomial karakteristik disini berkaitan dengan teorema Cayley-Hamilton yang mengatakan bahwa suatu matriks persegi memenuhi polinomial karakteristik. Namun, pada jurnal ini belum dibahas tentang keterkaitan teorema Cayley-Hamilton pada invers matriks dari suatu matriks yang diberikan.

2.2 Aljabar *Tropical*

Aljabar *tropical* mempunyai arti atas $\mathbb{R}_{\max}$ (atau $\mathbb{R}_{\min}$) bisa juga berarti atas $\mathbb{R}_{\max}$ dan $\mathbb{R}_{\min}$ (Litvinov, 2012, hal.8). Untuk pembahasan selanjutnya akan digunakan definisi aljabar *tropical* max-plus.

Definisi 2.1 Definisi Semiring (Subiono, 2015, hal.2)

Semiring $(S,+,\times)$ adalah suatu himpunan tak kosong S disertai dengan dua operasi biner $+$ membentuk monoid abelian dengan operasi biner $\times$ membentuk monoid, dan bersifat distributive pada $\times$ terhadap $+$.

□

Definisi 2.2 Semiring *Tropical* (Izhakian, 2008, hal.2)

Semiring *tropical* max-plus $(\mathbb{R}_\varepsilon,\oplus,\otimes)$ dengan $\mathbb{R}_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\mathbb{R}$ adalah bilangan real. Pada semiring $\mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan penjumlahan *tropical* $\oplus$ dan perkalian *tropical* $\otimes$ dimana:

$$a \oplus b \overset{\text{def}}{=} \max\{a, b\} \qquad (2.1)$$

$$a \otimes b \overset{\text{def}}{=} a + b \qquad (2.2)$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. □

Semiring *tropical* mempunyai elemen satuan $1_{\mathbb{R}_\varepsilon} = 0$ dan elemen nol $0_{\mathbb{R}_\varepsilon} = -\infty$.

Contoh 2.1

Diberikan $\mathbb{R}_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah semua bilangan real dan $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} -\infty$. Pada $\mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$

$$x \oplus y \overset{\text{def}}{=} \max\{x, y\}$$

$$x \otimes y \overset{\text{def}}{=} x +$$

Jadi $3 \oplus 5 = \max\{3,5\} = 5$ dan $-2 \otimes 1 = -2 + 1 = -1$. Selanjutnya untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$ berlaku:

1. Assosiatif

$$(x \oplus y) \oplus z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, y, z\}$$
$$= \max\{x, \max\{y, z\}\} = x \oplus (y \oplus z)$$
$$(x \otimes y) \otimes z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \otimes (y \otimes z)$$

2. Komutatif pada $\oplus$

$$x \oplus y = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = y \oplus x$$

3. Distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$

$$(x \oplus y) \otimes z = \max\{x, y\} + z = \max\{x + z, y + z\}$$
$$= (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$
$$x \otimes (y \oplus z) = x + \max\{y, z\} = \max\{x + y, x + z\}$$
$$= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

4. Adanya elemen nol, yaitu ε

$$x \oplus \varepsilon = \max\{x, -\infty\} = \max\{-\infty, x\} = \varepsilon \oplus x = x$$

5. Adanya elemen satuan, yaitu e

$$x \oplus e = x + 0 = 0 + x = e \oplus x = x$$

6. Elemen nol ε adalah penyerap untuk operasi $\otimes$

$$x \otimes \varepsilon = x + (-\infty) = -\infty = (-\infty) + x = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$$

7. Idempoten terhadap operasi $\oplus$

$$x \oplus x = \max\{x, x\} = x$$

Berdasarkan sifat-sifat tersebut maka $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ merupakan suatu semiring dengan dua operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$. Semiring $(\mathbb{R}_{\varepsilon}, \oplus, \otimes)$ lebih ringkasnya ditulis sebagai $\mathbb{R}_{\max}$.

Definisi 2.3

Semiring $\mathbb{R}_{\max}$ merupakan semiring komutatif yang sekaligus idempoten. Sebab untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$ berlaku $x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$ dan $x \oplus x = \max\{x, x\} = x$.

Definisi 2.4

Semiring komutatif $\mathbb{R}_{\max}$ merupakan *semifield*, sebab untuk setiap $\forall x \in \mathbb{R}$ ada $-x$, sehingga berlaku $x \otimes (-x) = x + (-x) = 0$. □

$\mathbb{R}_{\max}$ merupakan *semifield* idempoten. Penulisan $\mathbb{R}_{\max}$ disebut dengan aljabar max-plus. Elemen-elemen $\mathbb{R}_{\max}$ disebut juga dengan skalar. Seperti halnya dalam aljabar biasa prioritas urutan operasi $\otimes$ lebih dulu atas operasi $\oplus$.

Pangkat dalam aljabar max-plus diperkenalkan dengan menggunakan sifat assosiatif. Didefinisikan untuk $x \in \mathbb{R}_{\max}$ dan untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 0$

$$x^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{n} \tag{2.3}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.$x^{\otimes n}$ dalam aljabar biasa dibaca sebagai

$$x^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n} = n \times x$$

sedangkan untuk $n = 0$ didefinisikan $x^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} e = 0$.

Contoh 2.2

1. $2^{\otimes 2} = 2 \times 2 = 4$
2. $\frac{1}{3}^{\otimes 3} = 3 \times \frac{1}{3} = 1$ ◊

2.2.1 Matriks Atas aljabar *Tropical* Max-Plus

Definisi 2.5 (Izhakian, 2008)

Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dalam aljabar *tropical* max-plus dinotasikan oleh $M_{m \times n}(\mathbb{R}_{\max}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A = (a_{i,j}) | a_{i,j} \in (\mathbb{R}_{max})\}$ untuk $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 0$ dan $m \neq 0$, $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{1,2, \dots, n\}$ dan $\underline{m} \stackrel{\text{def}}{=} \{1,2, \dots, m\}$. Untuk $a_{i,j}$ merupakan elemen baris ke-i dan kolom ke-j untuk $i \in m$ dan $j \in n$ dari matriks $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}_{\max})$. □

Matriks anggota $M_{m \times n}(\mathbb{R}_{\max})$ disebut matriks *tropical* max-plus, dalam matriks A ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

karena semiring $\mathbb{R}_{\max}$ adalah semiring komutatif maka $x \otimes A = A \otimes x$, untuk $x \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$.

2.2.2 Matriks Identitas

Definisi 2.6

Sebuah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan dengan $I_T \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_{\max}^{m\times n})$ diberikan definisi oleh

$$[I_T]_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} e, \text{ untuk } i = j \\ \varepsilon, \text{ untuk } i \neq j \end{cases} \tag{2.5}$$

untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan $j = 1,2,\dots,n$. Dengan e adalah elemen identitas dari operasi $\otimes$ yaitu 0 dan ε adalah elemen identitas dari operasi $\oplus$ yaitu $-\infty$. □

Dalam hal ini matriks *I* ditulis sebagai

$$I_T = \begin{bmatrix} e & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \dots & e \end{bmatrix}$$

dan untuk matriks nol dinotasikan $\mathcal{Z} = \varepsilon \otimes I_T$.

2.2.3 Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ dinotasikan oleh $A \oplus B$ didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} [A \oplus B]_{i,j} &= a_{i,j} \oplus b_{i,j} \\ &= \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$.

Pada $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ berlaku $A \oplus B = B \oplus A$, sebab $[A \oplus B]_{i,j} = \max(a_{i,j}, b_{i,j}) = \max(b_{i,j}, a_{i,j}) = [B \oplus \mathrm{A}]_{\mathrm{i,j}}$ untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$.

Contoh 2.3

Himpunan matriks dalam aljabar max-plus dinotasikan $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$. Elemen $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ baris ke-i kolom ke-j dinotasikan oleh $a_{i,j}$ untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$. Diberikan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 & 10 \\ 1 & 2 & e \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & e \\ 6 & 1 & -1 \\ -7 & \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

didapat

$$[A \oplus B]_{1,1} = \varepsilon \oplus 4 = \max\{-\infty, 4\} = 4$$
$$[A \oplus B]_{1,2} = 3 \oplus 2 = \max\{3,2\} = 3$$
$$[A \oplus B]_{1,3} = 10 \oplus e = \max\{10,0\} = 10$$
$$[A \oplus B]_{2,1} = 1 \oplus 6 = \max\{1,6\} = 6$$
$$[A \oplus B]_{2,2} = 2 \oplus 1 = \max\{2,1\} = 2$$
$$[A \oplus B]_{2,3} = e \oplus -1 = \max\{0,-1\} = e$$
$$[A \oplus B]_{3,1} = 2 \oplus -7 = \max\{2,-7\} = 2$$
$$[A \oplus B]_{3,2} = -1 \oplus \varepsilon = \max\{-1,-\infty\} = -1$$
$$[A \oplus B]_{3,3} = 3 \oplus 2 = \max\{3,2\} = 3$$

dengan notasi matriks menjadi $A \oplus B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 6 & 2 & e \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

◊

2.2.4 Perkalian Matriks

Suatu matriks $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ dan $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ perkalian matriks $\alpha \otimes A$ didefinisikan dengan

$$[\alpha \otimes A]_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \alpha \otimes a_{i,j} \tag{2.6}$$

untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$.

Matriks $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R}_{\max})$ dan $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ didefinisikan perkalian matriks $A \otimes B$ dengan

$$[A \otimes B]_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{\mathrm{p}} a_{i,k} \otimes b_{k,j}$$
$$= \max_{k\in \underline{p}}\{a_{i,k} + b_{k,j}\}$$

untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$.

Contoh 2.4

Diberikan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & e & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Maka

$[A \otimes B]_{1,1} = 2 \otimes -1 \oplus 4 \otimes 2 \oplus 3 \otimes 3 = \max\{2 + (-1), 4 + 2, 3 + 3\} = 6$

$[A \otimes B]_{1,2} = 2 \otimes 4 \oplus 4 \otimes 1 \oplus 3 \otimes \varepsilon = \max\{2 + 4, 4 + 1, 3 + (-\infty)\} = 6$

$[A \otimes B]_{1,3} = 2 \otimes 5 \oplus 4 \otimes 2 \oplus 3 \otimes \varepsilon = \max\{2 + 5, 4 + 2, 3 + (-\infty)\} = 7$

$[A \otimes B]_{2,1} = 5 \otimes -1 \oplus 1 \otimes 2 \oplus 2 \otimes 3 = \max\{5 + (-1), 1 + 2, 2 + 3\} = 5$

$[A \otimes B]_{2,2} = 5 \otimes 4 \oplus 1 \otimes 1 \oplus 2 \otimes \varepsilon = \max\{5 + 4, 1 + 1, 2 + (-\infty)\} = 9$

$[A \otimes B]_{2,3} = 5 \otimes 5 \oplus 1 \otimes 2 \oplus 2 \otimes e = \max\{5 + 5, 1 + 2, 2 + 0\} = 10$

$[A \otimes B]_{3,1} = 1 \otimes -1 \oplus e \otimes 2 \oplus 3 \otimes 3 = \max\{1 + (-1), 0 + 2, 3 + 3\} = 6$

$[A \otimes B]_{3,2} = 1 \otimes 4 \oplus e \otimes 1 \oplus 3 \otimes \varepsilon = \max\{1 + 4, 0 + 1, 3 + (-\infty)\} = 5$

$[A \otimes B]_{3,3} = 1 \otimes 5 \oplus e \otimes 2 \oplus 3 \otimes e = \max\{1 + 5, 0 + 2, 3 + 0\} = 6$

dengan menggunakan notasi matriks didapat $A \otimes B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 5 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

◊

Perkalian matriks tidak selalu komutatif. Untuk matriks A dan B dalam contoh (2.4) didapat $B \otimes A = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \neq A \otimes B$.

2.2.5 Perpangkatan Matriks

Untuk $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}_{\max})$ pangkat ke-k dari A dinotasikan $A^{\otimes k}$ didefinisikan sebagai:

$$A^{\otimes k} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \otimes A \otimes \ldots \otimes A}_{k} \tag{2.7}$$

untuk $k \in \mathbb{N}$ dengan $k \neq 0$ dan $A^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} I(n, n)$. Elemen baris ke-$i$ kolom ke-j dari matriks $A^{\otimes k}$ secara umum adalah

$$\left[A^{\otimes k}\right]_{i,j} = \bigoplus_{r_{k-1}=1}^{n} a_{i,r_{k-1}} \dots \left(\bigoplus_{r_1=1}^{n} a_{r_2,r_1} \otimes a_{r_1,j} \right)$$

$$= \max_{1 \le \mathrm{r}_1, \dots, \mathrm{r}_{k-1} \le n} \{ a_{i,r_{k-1}} + \dots + a_{r_2 - r_1} + a_{r_2,j} \}$$

Untuk $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}_{\max})$ elemen baris ke-i dan kolom ke-j matriks $(\alpha \otimes A)^{\otimes k}$ adalah

$$[(\alpha \otimes A)^{\otimes k}]_{i,j} =$$

$$\max_{1 \le \mathrm{r}_1, \dots, \mathrm{r}_{k-1} \le n} \{ (\alpha + a_{i,r_{k-1}}) + \dots + (\alpha + a_{r_2 - r_1}) + (\alpha + a_{r_1,j}) \}$$

sehingga $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}_{\max})$ berlaku

$$(\alpha \otimes A)^{\otimes k} = \alpha^{\otimes k} \otimes A^{\otimes k}, \quad \text{untuk } k = 1,2, \dots$$

selanjutnya untuk setiap $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}_{\max})$ trace dari matriks A dinotasikan trace(A), didefinisikan sebagai $\mathrm{trace}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{i,j}$

Contoh 2.5

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 5 & \varepsilon & 6 \end{bmatrix}$$

maka matriks pangkat sebagai berikut:

$$A^{\otimes 2} = A \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 5 & \varepsilon & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 5 & \varepsilon & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 10 \\ 11 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

◊

2.2.6 Determinan *Tropical*

Karena ketiadaan invers terhadap operasi penjumlahan maka untuk determinan pada *tropical* didefinisikan sebagai permanen A.

Definisi 2.7 (Izhakian, 2008)

Untuk matriks $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}_{\max}^{m \times n})$, permanen A didefinisikan sebagai

$$\mathrm{perm}(A) = \bigoplus_{\sigma \in S_n} (a_{1\sigma(1)} \otimes a_{2\sigma(2)} \dots \otimes a_{n\sigma(n)}) \tag{2.8}$$

dengan σ dan S_n adalah himpunan semua permutasi $\{1,2,\ldots,n\}$. Maka determinan *tropical* menjadi permanen A, dapat ditulis

$$|A| = \bigoplus_{\sigma\in S_n}(a_{1\sigma(1)} \otimes a_{2\sigma(2)} \ldots \otimes a_{n\sigma(n)})$$

Berikut diberikan matriks A berukuran 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

hasil permutasi dari (1,2,3), karena $n = 3$ dan $3! = 6$ maka ada 6 permutasi. Yaitu $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2)$dan $(3,2,1)$ dapat ditulis dalam $\otimes_{i=1}^{n} (a_{i\sigma(i)})$ menjadi $(a_{11} \otimes a_{22} \otimes a_{33}), (a_{11} \otimes a_{23} \otimes a_{32}), (a_{12} \otimes a_{21} \otimes a_{33}), (a_{12} \otimes a_{23} \otimes a_{31}), (a_{13} \otimes a_{21} \otimes a_{32})$, dan $(a_{13} \otimes a_{22} \otimes a_{31})$.
Sehingga permanen A didapat

$$\begin{aligned}
\text{perm}(A) &= \oplus_{\sigma\in S_n} (a_{1\sigma(1)} \otimes a_{2\sigma(2)} \ldots \otimes a_{n\sigma(n)}) \\
&= (a_{11} \otimes a_{22} \otimes a_{33}) \oplus (a_{11} \otimes a_{23} \otimes a_{32}) \oplus (a_{12} \otimes a_{21} \otimes a_{33}) \\
&\quad \oplus (a_{12} \otimes a_{23} \otimes a_{31}) \oplus (a_{13} \otimes a_{21} \otimes a_{32}) \oplus (a_{13} \otimes a_{22} \otimes a_{31}) \\
&= \max\{(a_{11} + a_{22} + a_{33}), (a_{11} + a_{23} + a_{32}), (a_{12} + a_{21} + a_{33}), \\
&\quad (a_{12} + a_{23} + a_{31}), (a_{13} + a_{21} + a_{32}), (a_{13} + a_{22} + a_{31})\}
\end{aligned}$$

Contoh 2.6

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & e \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Hasil permutasi dari $\text{perm}(A)$ didapat:

$$\begin{aligned}
\text{perm}(A) = |A| &= \bigoplus_{\sigma\in S_n}(a_{1\sigma(1)} \otimes a_{2\sigma(2)} \ldots \otimes a_{n\sigma(n)}) \\
&= (1 \otimes 1 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 2 \otimes 3) \oplus (10 \otimes 5 \otimes 2) \\
&\quad \oplus (10 \otimes 2 \otimes 2) \oplus (e \otimes 5 \otimes 3) \oplus (e \otimes 1 \otimes 2) \\
&= \max\{1 + 1 + 2, 1 + 2 + 3, 10 + 5 + 2, 10 + 2 + 2, \\
&\quad 0 + 5 + 3, 0 + 1 + 2\} \\
&= \max\{4,6,17,14,8,3\}
\end{aligned}$$

$= 17$ ◊

2.2.7 Aljabar Max-Plus Simetris

Bacelli (2001) memperkenalkan aljabar max-plus simetri yang dilambangkan dengan $S_{\max}$

Definisi 2.8 Pasangan Terurut Aljabar

Diberikan pasangan terurut $\mathcal{P}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(x, y) \oplus (w, z) \stackrel{\text{def}}{=} (x \oplus w, y \oplus z)$$

$$(x,\ y) \otimes (w, z) \stackrel{\text{def}}{=} (x \otimes w \oplus y \otimes z, x \otimes z \oplus y \otimes w) \qquad \square$$

Contoh 2.7

Misal diketahui $a = (3,0)$ dan $b = (2,5)$ didapat

$a \oplus b = (3,0) \oplus (2,5) = (3 \oplus 2, 0 \oplus 5) = (3,5)$

$a \otimes b = (3,0) \otimes (2,5) = (3 \otimes 2 \oplus 0 \otimes 5, 3 \otimes 5 \oplus 0 \otimes 2)$

$= (5 \oplus 5, 8 \oplus 2) = (5,8)$ ◊

Jika $u = (x, y) \in \mathcal{P}_\varepsilon$, maka didefinisikan nilai mutlak aljabar max-plus dari u sebagai $|u|_\oplus = x \oplus y$ dan diperkenalkan dua operasi $\ominus$ yang didefinisikan sebagai operasi minus dalam aljabar max-plus dan $()^\bullet$ didefinisikan sebagai operasi *balance* sedemikian sehingga $\ominus u = (y, x)$ dan $u^\bullet = u \oplus (\ominus u) = (|u|_\oplus, |u|_\oplus)$.

Operator ominus mempunyai sifat sebagai berikut (Gaubert, 2001 hal 130):

$$u^\bullet = (\ominus u)^\bullet$$

$$(u^\bullet)^\bullet = u^\bullet$$

$$u \otimes v^\bullet = (u \otimes v)^\bullet$$

$$\ominus (\ominus u) = u$$

$$\ominus (u \oplus v) = (\ominus u) \oplus (\ominus v)$$

$$\ominus (u \otimes v) = (- \ominus u) \otimes v$$

Pada aljabar biasa $x - x = 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, tetapi pada aljabar berpasangan dipunyai $u \ominus u = u \oplus (\ominus u) = u^{\bullet} \neq (\varepsilon, \varepsilon)$ untuk semua $u \in \mathcal{P}_{\varepsilon}$.

Definisi 2.9 Struktur Quotient

Misal$u = (x, y), v = (w, z) \in \mathcal{P}_{\varepsilon}$, u *balanced* v dinotasikan dengan $u \nabla v$ jika $x \oplus z = y \oplus w$ □

Contoh 2.8

$(3{,}0)\nabla(3{,}3)$ karena $3 \oplus 3 = 3 = 0 \oplus 3$

$(3{,}0)\not\nabla(1{,}3)$ karena $3 \oplus 3 = 3 \neq 1 = 0 \oplus 1$ ◊

Jadi relasi *balance* bukan relasi ekuivalensi sehingga kita tidak dapat menggunakannya untuk mendefinisikan himpunan quotient dari $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ dengan ∇. Sehingga kita perkenalkan relasi $\mathcal{R}$ yang mendekati relasi *balance* yang didefinisikan sebagai berikut:

Jika $(x, y), (w, z) \in \mathcal{P}_{\varepsilon}$ maka

$$(x, y)\mathcal{R}(w, z) \text{ jika } \begin{cases} (x, y)\nabla(w, z), & \text{jika } x \neq y \text{ dan } w \neq z \\ (x, y) = (w, z), & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Catatan bahwa jika $u \in \mathcal{P}_{\varepsilon}$ maka $u \ominus u \nabla \mathcal{R}(\varepsilon, \varepsilon)$ kecuali jika $u = (\varepsilon, \varepsilon)$. Kita definisikan dua anggota baru untuk setiap $x \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$:$\ominus x$ dan $x^{\bullet}$ didalam 3 himpunan berbeda yaitu:

- $S^{\oplus} = \mathbb{R}_{\varepsilon}$
- $S^{\ominus} = \left\{\ominus x \,\middle|\, x \in \mathbb{R}_{\varepsilon}\right\}$
- $S^{\bullet} = \left\{x^{\bullet} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}_{\varepsilon}\right\}$

S_{max} adalah dioid simetri dari aljabar max-plus atau cukup aljabar max-plus simetri saja. Jadi $S = S^{\oplus} \cup S^{\ominus} \cup S^{\bullet}$. $S = S^{\oplus} \cap S^{\ominus} \cap S^{\bullet} = \left\{\overline{(\varepsilon, \varepsilon)}\right\}$ dan $\varepsilon = \ominus \varepsilon = \varepsilon^{\bullet}$. Jika $x, y \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$ maka

$$x \oplus (\ominus y) = x \text{ jika } x > y$$

$$x \oplus (\ominus y) = \ominus y \text{ jika } x < y$$

$$x \oplus (\ominus x) = x^{\bullet}$$

Contoh 2.9

Diketahui $x, y, z \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$ dengan $x = \ominus 0, y = 8$ dan $z = \ominus 3^{\bullet}$ maka

$$\begin{aligned}
x \oplus y \oplus z &= \ominus 0 \oplus 8 \ominus 3^{\bullet} \\
&= \ominus 0 \oplus 8 \ominus (3 \ominus 3) \\
&= \ominus 0 \oplus 8 \ominus 3 \oplus (\ominus (\ominus 3)) \\
&= \ominus 0 \oplus 8 \ominus 3 \oplus 3 \\
&= 8 \oplus 3 \ominus 0 \ominus 3 \\
&= (8 \oplus 3) \ominus (0 \oplus 3) \\
&= 8 \ominus 3 \\
&= 8
\end{aligned}$$

◊

2.3 Perluasan Semiring *Tropical*

Selanjutnya semiring *tropical* dapat diperluas menjadi *extended tropical semiring*. *Extended tropical semiring* merupakan suatu semiring yang dibangun dari gabungan dua himpunan yang saling asing $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^{v} = \{a^{v} : a \in \mathbb{R}\}$ bersama dengan $-\infty$ (Izhakian, 2008).

Definisi 2.10 Semiring Homomorfisma

Suatu pemetaan dari semiring S ke semiring R disebut homomorphisma jika $\forall a, b \in S$, berlaku:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$ (2.9)
2. $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$ (2.10)

perlu diperhatikan bahwa operasi biner $+$ pada $a + b$ pada umumnya tidak sama pada $f(a) + f(b)$, begitu juga operasi biner $\times$ pada $a \times b$ tidak sama pada $f(a) \times f(b)$. Homomorfisma f dinamakan idempoten jika $f^2 = f$. □

Diberikan $\mathbb{R}^{v}{}_{-\infty} = \mathbb{R}^{v} \cup \{-\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah bilangan real, $\mathbb{R}^{v}{}_{-\infty}$ disebut ideal ghost dan $\mathrm{T} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^{v} \cup \{-\infty\}$. Suatu pemetaan $v : \mathrm{T} \rightarrow \mathbb{R}^{v}{}_{-\infty}$ disebut pemetaan ghost, pemetaan v merupakan homomorfisma idempoten yang didefinisikan $v(x) = x + x, \forall x \in \mathbb{R}$ dan $v^2(x) = v$.

Definisi 2.11 *Extended Tropical* Semiring (Izhakian, 2008)

Extended tropical semiring $(\mathbb{T}, \oplus, \otimes)$ dimana $\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^{\nu} \cup \{-\infty\}$, $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dengan elemen satuan pada $\mathbb{T}$ adalah $1_{\mathbb{T}} = 0$ dan elemen nol $0_{\mathbb{T}} = -\infty$. □

Selanjutnya elemen $\mathbb{R}$ disebut dengan elemen *tangible* dan elemen $\mathbb{R}^{\nu}$ disebut elemen ghost, ditulis $\mathbb{T}^{\times}$ untuk $\mathbb{T} \backslash \{-\infty\}$. Dinotasikan $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dan $\bar{\mathbb{R}}^{\nu} = \mathbb{R}^{\nu} \cup \{-\infty\}$.

2.3.1 Urutan Parsial

Definisi 2.12

Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$, dan $a^{\nu}, b^{\nu} \in \mathbb{R}^{\nu}$ untuk $a, b \in \mathbb{R}$ dan $x, y \in \mathbb{T}$ Semiring $\mathbb{T}$ mempunyai urutan dengan relasi $\prec$ yang didefinisikan sebagai

1. $-\infty \prec x, \forall\, x \in \mathbb{T}^{\times}$
2. $a < a^{\nu}, \forall a \in \mathbb{R}$
3. untuk setiap bilangan real $a < b$, didapat $a \prec b, a \prec b^{\nu}, a^{\nu} \prec b$ dan $a^{\nu} \prec b^{\nu}$ □

Sedangkan urutan parsial dengan relasi $\preccurlyeq$ berlaku hanya saat kedua elemen berada di $\mathbb{R}$ atau di $\mathbb{R}^{\nu}$.

Contoh 2.10

Diasumsikan $1 < 2 < 3$ adalah bilangan real, maka

$$-\infty \prec 1 \prec 1^{\nu} \prec 2 \prec 2^{\nu} \prec 3 \prec 3^{\nu} \qquad \lozenge$$

2.3.2 Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ Pada $\mathbb{T}$

Definisi 2.13

Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$, dan $a^{\nu}, b^{\nu} \in \mathbb{R}^{\nu}$ untuk $a, b \in \mathbb{R}$ dan $x, y \in \mathbb{T}$. notasi $\max_{\prec}$ adalah maksimum pada urutan $\prec$. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{T}$ didefinisikan dengan

1. $-\infty \oplus x = x \oplus -\infty = x$, untuk setiap $x \in \mathbb{T}$
2. $x \oplus y = \max_{\prec}\{x, y\}$ kecuali $x = y$
3. $a \oplus a = a^{\nu} \oplus a^{\nu} = a \oplus a^{\nu} = a^{\nu} \oplus a = a^{\nu}$

4. $-\infty \otimes x = x \otimes -\infty = -\infty$, untuk setiap $x \in \mathrm{T}$
5. $a \otimes b = a + b$, untuk semua $a, b \in R$
6. $a^v \otimes b = a \otimes b^v = a^v \otimes b^v = (a+b)^v$ □

Contoh 2.11

Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$, $a^D, b^v \in \mathbb{R}^v$ dan $x, y \in \mathrm{T}$ maka

1. $-\infty \oplus 2 = 2 \oplus -\infty = 2$ atau
   $-\infty \oplus 2^v = 2^v \oplus -\infty = 2^v$, untuk setiap $x \in \mathrm{T}$
2. $1 \oplus 2^v = \max_{<}\{1, 2^v\} = 2^v$
3. $1 \oplus 1 = 1^v = 1^v \oplus 1^v = 1 \oplus 1^v = 1^v \oplus 1 = 1^v$
4. $-\infty \otimes 3 = 3 \otimes -\infty = -\infty + 3 = -\infty$ atau
   $-\infty \otimes 2^v = 2^v \otimes -\infty = -\infty + 2^v = -\infty$, untuk setiap $x \in \mathrm{T}$
5. $1 \otimes 2 = 1 + 2 = 3$
6. $2^v \otimes 3 = 2 \otimes 3^v = 2^v \otimes 3^v = (2+3)^v$

2.4 Aljabar *Supertropical*

Struktur *supertropical* dikonstruksi dari perluasan aljabar *tropical* (atau *extended tropical semiring*). Diberikan semiring $R \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T} \cup \mathcal{G} \cup \{-\infty\}$ dan suatu ideal $\mathcal{G}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G} \cup \{-\infty\}$ disebut dengan ideal ghost yang merupakan ideal dari semiring R. Suatu pemetaan $v: R \to \mathcal{G}_0$ disebut pemetaan ghost, pemetaan v homomorfisma idempoten jika memenuhi $v(x) = x \oplus x, \;\; \forall x \in \mathcal{T}$ dan $v^2(x) = v(x)$.

Definisi 2.13 Semiring dengan Ghost (Izhakian, dkk., 2010)

Semiring dengan ghost $(R, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring R (dengan elemen nol $0_R \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$ dan elemen satuan $1_R \stackrel{\text{def}}{=} e \stackrel{\text{def}}{=}$ o) bersama dengan ideal semiring $\mathcal{G}_0$ dan semiring idempoten yang homomorfisma $v: R \to \mathcal{G}_0$ yang disebut pemetaan ghost yang didefinisikan:

$$v(a): a \oplus a, \; \forall a \in R$$ □

Definisi 2.14 Semiring *Supertropical*

Diberikan triplet $(R, \mathcal{G}_0, v)$ adalah semiring dengan ghost. Semiring *supertropical* adalah semiring dengan ghost yang yang memenuhi:

1. Jika $a \neq b$ atau $a^v \neq b^v$ maka $a \oplus b \in \{a, b\}, \forall a, b \in R$ (*bipotence)*
2. Jika $a = b$ atau $a^v = b^v$ maka $a \oplus b = a^v$ (*supertropicality)*

ditulis a^v untuk $v(a)$. □

2.4.1 Relasi *Supertropical*

Definisi 2.15 *Ghost Surpasses* (Izhakian, dkk., 2010, hal.2232)

Didefinisikan relasi $\vDash_{gs}$, disebut dengan *ghost surpasses* pada semiring dengan ghost *R*, dengan notasi

$$b \vDash_{gs} a, \text{jika } \mathrm{b} = \mathrm{a} \oplus \mathrm{c} \tag{2.11}$$

untuk $\mathrm{c} \in \mathcal{G}_0$. Ketika $b \vDash_{gs} a$ berakibat $a \oplus b \in \mathcal{G}_0$.

Suatu relasi $\vDash_{gs}$ pada semiring dengan ghost R adalah suatu urutan parsial pada *R* bila untuk semua $a, b \in R$ memenuhi

1. Untuk setiap $a \in \mathcal{T},\ a^v \vDash_{gs} a$ tetapi $a \nvDash_{gs} a^v$, sifat tidak simetrik
2. Untuk setiap $a, b \in \mathcal{T}$ dan $a, b \in \mathcal{G}_0,\ a \vDash_{gs} b$ dan $b \vDash_{gs} a$ menyebabkan $a = b$, sifat simetrik. Yaitu ketika $a = a^v = b^v = b$

Contoh 2.12

1. $4 \oplus 7^v = \max_{<}\{4, 7^v\} = 7^v$

   maka $7^v \vDash_{gs} 4$ karena $7^v = 4 \oplus 7^v$
2. $8 \oplus 2^v = \max_{<}\{8, 2^v\} = 8$

   maka $8 \vDash_{gs} 8$ karena $8 = 8 \oplus 2^v$, hal ini berlaku sifat simetris karena $8 = 8$
3. $3 \oplus 3^v = \max_{<}\{3, 3^v\} = 3^v$

   maka $3^v \vDash_{gs} 3$ karena $3^v = 3 \oplus 3^v$, hal ini berlaku sifat tidak simetrik karena $3 \nvDash_{gs} 3^v$
4. $3^v \oplus -\infty = 3^v$ maka $3^v \vDash_{gs} 3^v$ karena $3^v = 3^v \oplus -\infty$, hal ini berlaku sifat simetris karena $3^v = 3^v$

2.4.2 Matriks Atas Aljabar *Supertropical*

Berikut adalah definisi matriks dalam aljabar *supertropical* sebagaimana telah dijelaskan oleh L.Rowen (2011).

Definisi 2.16

Himpunan matriks berukuran $n \times n$ dalam aljabar *supertropical* dinotasikan oleh $M_n(R)$. Himpunan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$M_n(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \middle| a_{i,j} \in R \right\} \tag{2.12}$$

Elemen $A \in M_n(R)$ baris ke-i kolom ke-j dinotasikan oleh $a_{i,j}$ atau dapat ditulis sebagai $[A]_{i,j}$. □

Untuk suatu matriks $A, B \in M_n(R)$ didefinisikan $B \succcurlyeq A$ jika $b_{i,j} \succcurlyeq a_{i,j}$ untuk semua i, j dan $B \cong A$ jika $B \succcurlyeq A$ dan $A \succcurlyeq B$. Relasi *ghost surpass* pada matriks didefinisikan dengan $A \vDash_{gs} B$ jika $A = B \oplus G$, untuk beberapa matriks ghost $G \in M_n(\mathcal{G}_0)$.

2.4.3 Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks $A, B \in M_{m\times n}(R)$ dinotasikan oleh $A \oplus B$ didefinisikan dengan

$$[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} \tag{2.13}$$

Untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$.

Untuk $A, B \in M_{m\times n}(R)$ berlaku bahwa $A \oplus B = B \oplus A$, sebab $[A \oplus B]_{i,j} = \max_{\prec}(a_{i,j}, b_{i,j}) = \max_{\prec}(b_{i,j}, a_{i,j}) = [B \oplus A]_{i,j}$ untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$.

Contoh 2.13

Himpunan matriks dalam aljabar *supertropical* dinotasikan $M_{m\times n}(R)$. Elemen $A \in M_{m\times n}(R)$baris ke-i kolom ke-j dinotasikan oleh $a_{i,j}$ untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$. Diberikan matriks $A, B \in M_{m\times n}(R)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 & 10 \\ 1^v & 2 & e \\ 2 & -1 & 3^v \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & e \\ 6^v & 1 & -1 \\ -7 & \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

didapat

$[A \oplus B]_{1,1} = \varepsilon \oplus 4 = 4$

$[A \oplus B]_{1,2} = 3 \oplus 2 = 3$

$[A \oplus B]_{1,3} = 10 \oplus e = 10$

$[A \oplus B]_{2,1} = 1^v \oplus 6^v = 6^v$

$[A \oplus B]_{2,2} = 2 \oplus 1 = 2$

$[A \oplus B]_{2,3} = e \oplus -1 = e$

$[A \oplus B]_{3,1} = 2 \oplus -7 = 2$

$[A \oplus B]_{3,2} = -1 \oplus \varepsilon = -1$

$[A \oplus B]_{3,3} = 3^v \oplus 2 = 3^v$

Dengan notasi matriks didapat

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 6^v & 2 & e \\ 2 & -1 & 3^v \end{bmatrix}$$ ◊

2.4.4 Perkalian Matriks

Suatu matriks $A \in M_{m\times n}(R)$ dan $\alpha \in R$ perkalian matriks $\alpha \otimes A$ didefinisikan dengan

$$[\alpha \otimes A]_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \alpha \otimes a_{i,j} \tag{2.14}$$

untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$.

Matriks $A \in M_{m\times p}(R)$ dan $B \in M_{p\times n}(R)$ perkalian matriks $A \otimes B$ didefinisikan dengan

$$[A \otimes B]_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{p} a_{i,k} \otimes b_{k,j}$$

untuk $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$.

Contoh 2.14

Diberikan matriks $A, B \in M_{m\times n}(R)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 2^v & 4 & 3^v \\ 5 & 1 & 2 \\ 1^v & e & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2^v & 1 & 2 \\ 3 & \varepsilon & e^v \end{bmatrix}$$

didapat

$[A \otimes B]_{1,1} = 2^v \otimes -1 \oplus 4 \otimes 2^v \oplus 3^v \otimes 3$

$= \left(2 + (-1)\right)^v \oplus (4 + 2)^v \oplus (3 + 3)^v = 1^v \oplus 6^v \oplus 6^v = 6^v$

$[A \otimes B]_{1,2} = 2^v \otimes 4 \oplus 4 \otimes 1 \oplus 3^v \otimes \varepsilon$

$= (2 + 4)^v \oplus (4 + 1) \oplus \varepsilon = 6^v \oplus 5 \oplus \varepsilon = 6^v$

$[A \otimes B]_{1,3} = 2^v \otimes 5 \oplus 4 \otimes 2 \oplus 3^v \otimes e^v$

$= (2 + 5)^v \oplus (4 + 2) \oplus (3 + 0)^v = 7^v \oplus 6 \oplus 3^v = 7^v$

$[A \otimes B]_{2,1} = 5 \otimes -1 \oplus 1 \otimes 2^v \oplus 2 \otimes 3$

$= \left(5 + (-1)\right) \oplus (1 + 2)^v \oplus (2 + 3) = 4 \oplus 3^v \oplus 5 = 5$

$[A \otimes B]_{2,2} = 5 \otimes 4 \oplus 1 \otimes 1 \oplus 2 \otimes \varepsilon$

$= (5 + 4) \oplus (1 + 1) \oplus \varepsilon = 6 \oplus 2 \oplus \varepsilon = 6$

$[A \otimes B]_{2,3} = 5 \otimes 5 \oplus 1 \otimes 2 \oplus 2 \otimes e^v$

$= (5 + 5) \oplus (1 + 2) \oplus (2 + 0)^v = 10 \oplus 3 \oplus 2^v = 10$

$[A \otimes B]_{3,1} = 1^v \otimes (-1) \oplus e \otimes 2^v \oplus 3 \otimes 3$

$= (1 + (-1))^v \oplus (0 + 2)^v \oplus (3 + 3) = e^v \oplus 2^v \oplus 6 = 6$

$[A \otimes B]_{3,2} = 1^v \otimes 4 \oplus e \otimes 1 \oplus 3 \otimes \varepsilon$

$= (1 + 4)^v \oplus (0 + 1) \oplus \varepsilon = 5^v \oplus 1 \oplus \varepsilon = 5^v$

$[A \otimes B]_{3,3} = 1^v \otimes 5 \oplus e \otimes 2 \oplus 3 \otimes e^v$

$= (1 + 5)^v \oplus (0 + 2) \oplus (3 + 0)^v = 6^v \oplus 2 \oplus 3^v = 6^v$

dengan menggunakan notasi matriks didapat $A \otimes B = \begin{bmatrix} 6^v & 6^v & 7^v \\ 5 & 6 & 10 \\ 6 & 5^v & 6^v \end{bmatrix}$

Perkalian matriks tidak selalu komutatif. Untuk matriks A dan B dalam contoh (2.4) didapat $B \otimes A = \begin{bmatrix} 9 & 5^v & 8 \\ 6 & 6^v & 5^v \\ 5^v & 7 & 6^v \end{bmatrix} \neq A \otimes B$. ◊

2.4.5 Perpangkatan Matriks

Untuk $A \in M_{m \times n}(R)$ pangkat ke-k dari A dinotasikan $A^{\otimes k}$ didefinisikan sebagai:

$$A^{\otimes k} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{k} \tag{2.15}$$

untuk $k \in \mathbb{N}$ dengan $k \neq 0$ dan $A^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} I_R(n, n)$.

Elemen baris ke-i kolom ke-j dari matriks $A^{\otimes k}$ secara umum adalah

$$\left[A^{\otimes k}\right]_{i,j} = \bigoplus_{r_{k-1}=1}^{n} a_{i,r_{k-1}} \dots \left(\bigoplus_{r_1=1}^{n} a_{r_2,r_1} \otimes a_{r_1,j} \right)$$

Contoh 2.15

Diberikan matriks $A, B \in M_3(R)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 2^v & 4 & 3^v \\ 5 & 1 & 2 \\ 1^v & e & 3 \end{bmatrix}$$

Maka $A^{\otimes 3} = A \otimes A \otimes A$

$$= \begin{bmatrix} 2^v & 4 & 3^v \\ 5 & 1 & 2 \\ 1^v & e & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2^v & 4 & 3^v \\ 5 & 1 & 2 \\ 1^v & e & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2^v & 4 & 3^v \\ 5 & 1 & 2 \\ 1^v & e & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 5 & 6^v \\ 7^v & 9 & 7^v \\ 5 & 5^v & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2^v & 4 & 3^v \\ 5 & 1 & 2 \\ 1^v & e & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11^v & 13 & 12^v \\ 14 & 11 & 10^v \\ 10^v & 9 & 9 \end{bmatrix} \qquad \lozenge$$

2.4.6 Matriks Identitas, *Quasi-zero* dan *Quasi-identity*

Matriks identitas *supertropical* sama halnya dengan matriks identitas *tropical*, yaitu $I_T = I_R$ diberikan definisi oleh

$$[I_T]_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e, & \text{untuk } i = j \\ \varepsilon, & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Matrik $Z_{\mathcal{G}}$ merupakan matriks *quasi-zero* yaitu matriks berukuran $n \times n$ yang didefinisikan

$$\left[Z_{\mathcal{G}}\right]_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varepsilon, & \text{untuk } i = j \\ \varepsilon \text{ atau } a^v \in \mathcal{G}, & \text{untuk } i \neq j \end{cases} \qquad (2.16)$$

Suatu matriks *quasi-identity* $I_{\mathcal{G}}$ adalah matriks nonsingular atau $|I_{\mathcal{G}}| = 1_R$, perkalian idempoten matriks $I_{\mathcal{G}}$ akan menghasilkan $I_{\mathcal{G}}{}^2 = I \oplus Z_{\mathcal{G}}$. Matriks ghost *quasi-identity* adalah matriks singular dinotasikan dengan $I_{\mathcal{G}}{}^v = I^v \oplus Z_{\mathcal{G}}$.

2.4.7 Matriks Minor dan Adjoin Matriks

Jika $A \in M_n(R)$ maka minor dari elemen $a_{i,j}$ didefinisikan sebagai determinan dari submatrik setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Minor dari $a_{i,j}$ dinotasikan dengan $a'_{i,j}$ yaitu hasil dari determinan submatrik setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Minor $a_{i,j}$ dinyatakan juga sebagai kofaktor entri $a_{i,j}$ dinotasikan dengan $C_{i,j}$ karena semua tanda minor entri $a_{i,j}$ dihilangkan. Adjoin matriks A dinotasikan dengan $\mathrm{Adj}(A)$ didefinisikan sebagai transpose dari matriks kofaktor yang dihasilkan. Selanjutnya $\mathrm{Adj}(A)$ dinotasikan dengan $(a'_{i,j})^t$.

Contoh 2.16

Diberikan matriks $A \in M_3(R)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1^v & e & \varepsilon \\ 3 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1^v \end{bmatrix}$$

maka didapatkan elemen kofaktor sebagai berikut:

$C_{11} = (4 \otimes 1^v) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon) = 5^v \oplus \varepsilon = 5^v$

$C_{12} = (3 \otimes 1^v) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon) = 3^v \oplus \varepsilon = 3^v$

$C_{13} = (3 \otimes \varepsilon) \oplus (4 \otimes \varepsilon) = \varepsilon \oplus \varepsilon = \varepsilon$

$C_{21} = (e \otimes 1^v) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon) = 1^v \oplus \varepsilon = 1^v$

$C_{22} = (1^v \otimes 1^v) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon) = 2^v \oplus \varepsilon = 2^v$

$C_{23} = (1^v \otimes \varepsilon) \oplus (e \otimes \varepsilon) = \varepsilon \oplus \varepsilon = \varepsilon$

$C_{31} = (e \otimes \varepsilon) \oplus (\varepsilon \otimes 4) = \varepsilon \oplus \varepsilon = \varepsilon$

$C_{32} = (1^v \otimes \varepsilon) \oplus (\varepsilon \otimes 3) = \varepsilon \oplus \varepsilon = \varepsilon$

$C_{33} = (1^v \otimes 4) \oplus (e \otimes 3) = 5^v \oplus 3 = 8^v$

sehingga matriks kofaktor adalah

$$\begin{bmatrix} 5^v & 3^v & \varepsilon \\ 1^v & 2^v & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8^v \end{bmatrix}$$

Dan adjoin dari A adalah

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 5^v & 1^v & \varepsilon \\ 3^v & 2^v & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8^v \end{bmatrix}$$ ◊

2.4.8 Matriks *Pseudo-Invers* (Niv, 2015)

Definisi 2.17

Suatu matriks $A \in M_n(R)$ dikatakan *invertible* atas aljabar *supertropical* jika terdapat matriks $B \in M_n(R)$ sehingga memenuhi $A \otimes B = I_R$ dimana B disini disebut invers kanan dan memenuhi $B \otimes A = I_R$ dimana B disini disebut invers kiri dari A.

Definisi 2.18

Matriks $A^\nabla \in M_n(R)$ dikatakan matriks *pseudo-invers* dari matriks A atas R jika memenuhi

$$A \otimes A^\nabla = I_A \text{ dan } A^\nabla \otimes A = I_A \tag{2.17}$$

□

matriks I_A adalah kuasi identitas dari matriks A untuk sebelah kanan dan matriks I_A adalah kuasi identitas dari matriks A untuk sebelah kiri. Untuk A^∇ didefinisikan dengan

$$A^\nabla = \frac{1_R}{|A|} \otimes \text{adj } A$$

Contoh 2.17

Diberikan matriks $A \in M_n(R)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2^v & e \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ e & \varepsilon & 6 \end{bmatrix}$$

Didapat $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2^v & e \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ e & \varepsilon & 6 \end{vmatrix} = 10 \oplus 6^v \oplus \varepsilon \oplus 8^v \oplus 5 \oplus 3 = 10$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 8^v & 7 & 2^v \\ 6^v & 5 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & 8^v & 6^v \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 2^v & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^\nabla = \frac{1_R}{10} \otimes \begin{bmatrix} 9 & 8^v & 6^v \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 2^v & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -10 \otimes \begin{bmatrix} 9 & 8^v & 6^v \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 2^v & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2^v & -4^v \\ -6 & -3 & -5 \\ -7 & -8^v & -6 \end{bmatrix}$$

Cek untuk $A \otimes A^{\nabla} = I_A$ dan $A^{\nabla} \otimes A = I_A$

$$A \otimes A^{\nabla} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{\nu} & e \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ e & \varepsilon & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & -2^{\nu} & -4^{\nu} \\ -6 & -3 & -5 \\ -7 & -8^{\nu} & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & -1^{\nu} & -3^{\nu} \\ -3^{\nu} & e & -2^{\nu} \\ -1^{\nu} & -2^{\nu} & e \end{bmatrix}$$

$$A^{\nabla} \otimes A = \begin{bmatrix} -1 & -2^{\nu} & -4^{\nu} \\ -6 & -3 & -5 \\ -7 & -8^{\nu} & -6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2^{\nu} & e \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ e & \varepsilon & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 1^{\nu} & 2^{\nu} \\ -5^{\nu} & e & 1^{\nu} \\ -6^{\nu} & -5^{\nu} & e \end{bmatrix}$$

Didapat untuk $I_A = \begin{bmatrix} e & -1^{\nu} & -3^{\nu} \\ -3^{\nu} & e & -2^{\nu} \\ -1^{\nu} & -2^{\nu} & e \end{bmatrix}$ dan $I_A = \begin{bmatrix} e & 1^{\nu} & 2^{\nu} \\ -5^{\nu} & e & 1^{\nu} \\ -6^{\nu} & -5^{\nu} & e \end{bmatrix}$

2.4.9 Determinan *Supertropical*

Untuk matriks $A \in M_n(R)$ determinan dari A adalah permanen dari A didefinisikan sebagai

$$\left| A \right| = \bigoplus_{\sigma \in S_n} (a_{1\sigma(1)} \otimes a_{2\sigma(2)} \ldots \otimes a_{n\sigma(n)}) \tag{2.18}$$

Dimana $\sigma \in S_n$ dengan S_n adalah himpunan semua permutasi $\{1,2, \ldots, n\}$.

Suatu matriks $A \in M_n(R)$ dikatakan nonsingular jika $\left| A \right| \in \mathcal{T}$, kemudian jika $\left| A \right| \in \mathcal{T}$ maka matriks A invertibel dan dikatakan singular jika $\left| A \right| \in \mathcal{G}_0$.

Contoh 2.18

Diberikan matriks $A \in M_n(R)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & \varepsilon \\ e & 1 & 1^{\nu} \end{bmatrix}$$

didapat,

$$\begin{aligned} \left| A \right| &= (1 \otimes 4 \otimes 1^{\nu}) \oplus (2 \otimes \varepsilon \otimes e) \oplus (6 \otimes 3 \otimes 1) \oplus (6 \otimes 4 \otimes e) \\ &\quad \oplus (2 \otimes 3 \otimes 1^{\nu}) \oplus (1 \otimes \varepsilon \otimes 1) \\ &= 6^{\nu} \oplus \varepsilon \oplus 10 \oplus 10 \oplus 6^{\nu} \oplus 2 \\ &= 10^{\nu} \end{aligned}$$

karena $\left| A \right| = 10^{\nu}$ dan $10^{\nu} \in \mathcal{G}_0$ maka matriks A merupakan matriks singular.

2.4.10 Polinomial *Supertropical* (Niv, 2015)

Definisi 2.19

Polinomial atas aljabar *supertropical* didefinisikan dengan

$$f(x) = \sum_{i=0,1,2,\ldots,n}^{\oplus} a_i \otimes x^{\otimes i} \in R[x] \tag{2.19}$$

Suatu monomial dari $f(x)$ yang mendominasi beberapa $x \in R$ disebut dengan essensial dan monomial dari $f(x)$ yang tidak mendominasi untuk suatu $x \in R$ disebut inessensial. Polinomial essensial dinotasikan

$$f^{es}(x) = \sum_{i \in I}^{\oplus} a_i \otimes x^{\otimes i} \in R[x]$$

Dimana $a_i x^i$ adalah sebagai monomial essensial $\forall i \in I$.

2.4.11 Polinomial karakteristik (Izhakian, 2010)

Definisi 2.20

Polinomial karakteristik pada aljabar *supertropical* didefinisikan dengan

$$f_A(\lambda) = |\lambda \otimes I_R \oplus A|$$

□

dimana I_R adalah matriks identitas *supertropical*. Jika diekspansikan, maka determinan dari $\lambda \otimes I_R \oplus A$ menjadi

$$= \begin{vmatrix} \lambda \oplus a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda \oplus a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda \oplus a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$f_A(\lambda) = \lambda^{\otimes n} \oplus \alpha_1 \otimes \lambda^{\otimes n-1} \oplus \alpha_2 \otimes \lambda^{\otimes n-2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{n-1} \otimes \lambda \oplus \alpha_n$$

atau supaya lebih ringkas bisa ditulis $f_A(\lambda) = \sum_{k=n,n-1,\ldots,0}^{\oplus} \alpha_{n-k} \otimes \lambda^{\otimes n}$ dimana $\alpha_{n-k} = \sum_{B \in C_k(A)}^{\oplus} \det B$ dengan $C_k(A)$ adalah himpunan semua submatriks dari A sehingga determinan dari dari $\lambda \otimes I_R \oplus A$ adalah suatu polinomial karakteristik berderajat n.

Contoh 2.19

Diberikan matriks $A \in M_3(R)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2^v & 6 \\ 3 & 4 & \varepsilon \\ e & 1 & 1^v \end{bmatrix}$$

Maka polinomial karakteristik dari A

$$|\lambda \otimes I \oplus A| = \begin{vmatrix} \lambda \oplus 1 & 2^v & 6 \\ 3 & \lambda \oplus 4 & \varepsilon \\ e & 1 & \lambda \oplus 1^v \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) = {} & \lambda^{\otimes 3} \oplus (1 \oplus 4 \oplus 1^v) \otimes \lambda^{\otimes 2} \oplus ((1 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 1^v) \\ & \oplus (4 \otimes 1^v) \oplus (2^v \otimes 3) \oplus (6 \otimes e) \oplus (\varepsilon \otimes 1)) \otimes \lambda \\ & \oplus ((1 \otimes 4 \otimes 1^v) \oplus (1 \otimes \varepsilon \otimes 1) \oplus (4 \otimes 6 \otimes e) \\ & \oplus (1^v \otimes 2^v \otimes 3) \oplus (2^v \otimes \varepsilon \otimes e) \oplus (6 \otimes 1 \otimes e)) \\ = {} & \lambda^{\otimes 3} \oplus 4 \otimes \lambda^{\otimes 2} \oplus 6 \otimes \lambda \oplus 10 \end{aligned}$$

BAB 3

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dibahas metode penelitian sebagaimana diberikan berikut, yaitu:

1. Studi Literatur

   Mengkaji dasar teori tentang aljabar *supertropical* serta keterkaitannya dengan teorema Cayley-Hamilton. Sebelum mengkaji tentang aljabar *supertropical* terlebih dahulu mengkaji teorema Cayley-Hamilton dalam aljabar konvensional dan teorema Cayley-Hamilton dalam aljabar tropical max-plus, selanjutnya termasuk penelitian yang membahas polinomial karakteristik untuk matriks *supertropical* serta penelitian yang membahas pembuktian teorema Cayley-Hamilton.

2. Mendapatkan keberlakuan teorema Cayley-Hamilton atas aljabar *supertropical*.

   Pada tahapan ini dilakukan pembuktian teorema Cayley-Hamilton atas aljabar *supertropical*, kemudian dengan menggunakan teorema tersebut didapatkan suatu akibat menentukan invers matriks menggunakan teorema Cayley-Hamilton.

BAB 4
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan diberikan hasil pembahasan yaitu tentang konstruksi pembuktian teorema Cayley-Hamilton atas aljabar *supertropical*. Kemudian, akan dibahas tentang keterkaitan teorema Cayley-Hamilton dengan matriks *invertible*.

4.1 Cayley-Hamilton atas Aljabar *Supertropical*

Sebelum membahas Cayley-Hamilton dalam aljabar *supertropical*, terlebih dahulu didefinisikan polinomial karakteristik dan ditunjukkan teorema Cayley-Hamilton dalam aljabar konvensional. Jika A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ dan $\varphi \subset \{1,2,\dots,n\}$, maka $A_{\varphi\varphi}$ adalah submatriks yang diperoleh dengan menghapus seluruh baris dan kolom dari A kecuali elemen dari baris dan kolom yang dinyatakan oleh φ. Polinomial karakteristik suatu matriks adalah

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n \tag{4.1}$$

untuk $c_k = (-1)^k \sum_{\sigma \in C_n^k} \det(A_{\varphi\varphi})$ dengan C_n^k adalah himpunan dari seluruh sub-himpunan k elemen dari himpunan $\{1,2,\dots,n\}$. Kemudian, teorema Cayley-Hamilton dalam aljabar konvensional menyatakan bahwa suatu matriks persegi A memenuhi polinomial karakteristik yaitu

$$A^n + c_1A^{n-1} + \cdots + c_{n-1}A + c_nI = 0 \tag{4.2}$$

Dalam aljabar max-plus karena tidak didefinisikan operasi pengurangan mengakibatkan koefisien $c_k\lambda^{n-k}$ dari persamaan (4.2) yang bertanda negatif dipindahkan keruas kanan. Sifat-sifat dari permutasi digunakan untuk memisahkan antara koefisien $c_k\lambda^{n-k}$ yang bernilai positif. Untuk menentukan analogi polinomial karakteristik dalam aljabar max-plus dilakukan melalui pendekatan fungsi eksponensial e^{sA}, yaitu matriks e^{sA} disubstitusikan pada persamaan (4.1) diperoleh

$$\det(\lambda I - e^{sA}) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1}\lambda + \gamma_n \quad (4.3)$$

dengan $\gamma_k(s) = (-1)^k \sum_{\sigma \in C_n^k} \det(e^{sA_{\varphi\varphi}})$. Selanjutnya matriks e^{sA} disubstitusikan pada persamaan (4.2) menjadi

$$e^{sA^n} + \gamma_1 e^{sA^{n-1}} + \cdots + \gamma_{n-1} e^{sA} + \gamma_n I = 0 \quad (4.4)$$

sehingga didapat polinomial karakteristik suatu matriks dalam aljabar max-plus adalah

$$\lambda^{\otimes n} \oplus \bigoplus_{k \in l} d_k \otimes \lambda^{\otimes n-k} = \bigoplus_{k \in j} d_k \otimes \lambda^{\otimes n-k} \quad (4.5)$$

dengan d_k adalah koefisien tertinggi untuk setiap $\lambda^{\otimes n-k}$. Kemudian, teorema Cayley-Hamilton dalam aljabar max-plus menyatakan bahwa suatu matriks persegi A memenuhi polinomial karakteristik pada persamaan (4.5).

Selanjutnya, akan dibahas tentang bagaimana teorema Cayley-Hamilton dapat berlaku pada aljabar *supertropical*. Berdasarkan dari Adi Niv (2015) dan Gaubert (2006) operasi minus $\ominus$ didefinisikan sebagai berikut

Definisi 4.1.1

Jika $x, y \in R$ maka

$$x \oplus (\ominus\, y) = x \text{ jika } x \succ y$$

$$x \oplus (\ominus\, y) = \ominus\, y \text{ jika } x \prec y$$

$$x \oplus (\ominus\, x) = x^{\nu} \quad \square$$

Contoh 4.1

$5^{\nu} \oplus (\ominus\, 1) = 5^{\nu}$

$3^{\nu} \oplus (\ominus\, 4) = \ominus\, 4$

$2 \oplus (\ominus\, 2) = 2^{\nu}$ ◊

untuk mendapatkan analogi dari aljabar konvensional dan aljabar max-plus menurut Stephane Gaubert (2006) diberikan definisi polinomial karakteristik bertanda sebagai berikut:

Definisi 4.1.2 Polinomial Karakteristik Bertanda (Gaubert, 2006)

Untuk $A \in M_n(R)$ maka polinomial karakteristik bertanda dari A adalah

$$f_A(\lambda) = |\lambda \otimes I_R \ominus A| \tag{4.6}$$

Dimana I_R adalah matriks identitas *supertropical*. □

Polinomial karakteristik ini digunakan hanya untuk mencari polinomial karakteristik bertanda. Sedangkan polinomial karakteristik *supertropical* sebagaimana didefinisikan dalam definisi 2.20 yaitu $f_A(\lambda) = |\lambda \otimes I_R \oplus A|$.

Definisi 4.1.3 Urutan Permutasi σ

Urutan permutasi σ dari $\{1,2,\dots,n\}$ adalah pemetaan bijektif pada dirinya sendiri yaitu $\sigma: \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$. □

domain dari σ dinotasikan dengan dom σ, kardinalitas dari dom σ dinotasikan dengan $|\sigma|$dan tanda dari suatu permutasi σ dinotasikan $\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Definisi 4.1.4 Determinan Bertanda

Didefinisikan permutasi bertanda dengan $\mathrm{sgn}(\sigma) = 0$ jika σ genap dan $\mathrm{sgn}\ (\sigma) =\ominus 0$ jika σ ganjil. Maka determinan dari matriks A berukuran $n \times n = (a_{i,j})$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\det A = \bigoplus_{\sigma \in Sn} \mathrm{sgn}\ (\sigma) \otimes_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} a_{i,\sigma(i)}$$

□

berdasarkan persamaan 4.6 pada bagian ini akan ditunjukkan cara mencari nilai maksimum dari c_{n-k} dengan menggunakan suatu urutan permutasi. Terlebih dahulu ditentukan $\mathrm{dom}\ \sigma = C_n^k$ selanjutnya, menentukan $(i, \sigma(i))$ dimana $i \in \mathrm{dom}\ \sigma$ dan $\sigma(i)$ adalah hasil pemetaan dari $\sigma: \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$.

Definisi 4.1.5 Hasil Perkalian Elementer (Miso Chung, 1995)

Hasil perkalian elementer dari matriks $A \in M_n(R)$ adalah setiap hasil perkalian n entri dari A yang tidak boleh dua diantaranya berasal dari baris atau dari kolom yang sama. Suatu hasil perkalian elementer genap berbentuk $a_{1j1} \otimes a_{2j2} \otimes \dots \otimes a_{njn}$ dimana $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah sebuah permutasi genap dan Suatu hasil perkalian elementer ganjil berbentuk $\ominus (a_{1j1} \otimes a_{2j2} \otimes \dots \otimes a_{njn})$ dimana $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah sebuah permutasi ganjil. □

Definisi 4.1.6

Didefinisikan polinomial karakteristik bertanda genap $f_A^+(\lambda)$ dan polinomial karakteristik bertanda ganjil $f_A^-(\lambda)$ dari polinomial karakteristik $f_A(\lambda) = |\lambda \otimes I_R \ominus A|$ sebagai berikut:

$$f_A^+(\lambda) = f_A^-(\lambda)$$ □

dengan

$$f_A^+(\lambda) = \sum\nolimits_{k=0,2,\dots,n}^{\oplus} \left(\sum\nolimits_{\oplus} |A|_{\mathrm{sgn}(\sigma)=0} \otimes \prod\nolimits_{i \in \mathrm{dom}\,\sigma}^{\otimes} a_{i,\sigma(i)} \right) \otimes \lambda^{\otimes n-k}$$

$$f_A^+(\lambda) = \sum\nolimits_{k=0,2,\dots,n}^{\oplus} \left(\sum\nolimits_{\oplus} |A|_{\mathrm{sgn}(\sigma)=\ominus 0} \otimes \prod\nolimits_{i \in \mathrm{dom}\,\sigma}^{\otimes} a_{i,\sigma(i)} \right) \otimes \lambda^{\otimes n-k}$$

Polinomial karakteristik $f_A(\lambda)$ dari suatu matriks persegi adalah jumlahan dari hasil perkalian elementer bertanda yang bersesuaian dengan variabel λ. Anggota dari perkalian elementer sebanyak k elemen didapatkan dari kardinalitas $\mathrm{dom}\,\sigma$ atau $|\sigma|$ sedangkan banyaknya anggota submatriks dari kardinalitas $\mathrm{dom}\,\sigma$ adalah C_n^k. Selanjutnya, urutan permutasi digunakan untuk menentukan pasangan perkalian elementer dengan indeks $(i, \sigma(i))$ dimana σ adalah urutan permutasi dari $\{1,2,\dots,n\}$ dan $i \in \mathrm{dom}\,\sigma$. Persamaan karakteristik ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukan variable berderajat $n - k$
2. Menemukan semua urutan permutasi σ sedemikian hingga $|\sigma| = k$
3. Membuat pasangan terurut $(i, j) = (i, \sigma(i))$ dengan $i \in \mathrm{dom}\,\sigma$
4. Mendapatkan semua hasil perkalian $a_{i,j}$ yang berorder $|\sigma| = k$
5. Memaksimumkan ($\oplus$) semua hasil perkalian bertanda yang bersesuaian dengan $\lambda^{\otimes n-k}$ yang akan menjadi koefisien variabel $\lambda^{\otimes n-k}$.

Contoh 4.2

Diberikan matriks A berukuruan 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

berikut merupakan daftar hasil permutasi bertanda dari matriks $(\lambda \otimes I_R \ominus A)$ ditunjukkan pada tabel 4.1 berikut:

Tabel. 4.1 hasil permutasi matriks $(\lambda \otimes I_R \ominus A_3)$

	$\|\sigma\|$	dom σ	Permutasi	genap/ganjil	$\otimes_{i=1}^{n} (a_{i\sigma(i)})$
x^3	$n = 0$				
x^2	$n = 1$	(1)	(1)	genap	a_{11}
		(2)	(2)	genap	a_{22}
		(3)	(3)	genap	a_{33}
x^1	$n = 2$	$(1, 2)$	(1,2)	genap	$a_{11} \otimes a_{22}$
			(2,1)	*ganjil*	$\ominus (a_{12} \otimes a_{21})$
		$(1, 3)$	(1,3)	genap	$a_{11} \otimes a_{33}$
			(3,1)	*ganjil*	$\ominus (a_{13} \otimes a_{31})$
		$(2, 3)$	(2,3)	genap	$a_{22} \otimes a_{33}$
			(3,2)	*ganjil*	$\ominus (a_{23} \otimes a_{32})$
x^0	$n = 3$	$(1, 2, 3)$	(1,2,3)	genap	$a_{11} \otimes a_{22} \otimes a_{33}$
			(1,3,2)	*ganjil*	$\ominus (a_{11} \otimes a_{23} \otimes a_{32})$
			(2,3,1)	genap	$a_{12} \otimes a_{23} \otimes a_{31}$
			(2,1,3)	*ganjil*	$\ominus (a_{12} \otimes a_{21} \otimes a_{33})$
			(3,1,2)	genap	$(a_{13} \otimes a_{21} \otimes a_{32})$
			(3,2,1)	*ganjil*	$\ominus (a_{13} \otimes a_{22} \otimes a_{31})$

Untuk polinomial karakteristik bertanda $f_A(\lambda) = \det(\lambda \otimes I_R \ominus A)$ maka

$$\lambda \otimes I_R \ominus A = \begin{bmatrix} \lambda \ominus a_{11} & \ominus a_{12} & \ominus a_{13} \\ \ominus a_{21} & \lambda \ominus a_{22} & \ominus a_{23} \\ \ominus a_{31} & \ominus a_{32} & \lambda \ominus a_{33} \end{bmatrix}$$

Elemen-elemen hasil perkalian bertanda genap dari $\lambda \otimes I_R \ominus A$ adalah $(\lambda \ominus a_{11}) \otimes (\lambda \ominus a_{22}) \otimes (\lambda \ominus a_{33})$, $(\ominus a_{12}) \otimes (\ominus a_{23}) \otimes (\ominus a_{31})$ dan $(\ominus a_{13}) \otimes (\ominus a_{21}) \ominus \big((\lambda \ominus a_{11}) \otimes (\ominus a_{23}) \otimes (\ominus a_{32})\big)$, $\ominus \big((\ominus a_{12}) \otimes (\ominus a_{21}) \otimes (\lambda \ominus a_{33})\big) \otimes \big(\ominus a_{32}\big)$. Elemen-elemen hasil perkalian bertanda ganjil adalah dan $\ominus \big((\ominus a_{13}) \otimes (\lambda \ominus a_{22}) \otimes (\ominus a_{31})\big)$. Supaya penulisan lebih ringkas operasi $\otimes$ tidak ditulis, untuk $a_{11}a_{22}$ adalah $a_{11} \otimes a_{22}$ dan λ^r adalah $\lambda^{\otimes r}$. Selanjutnya, hasil perkalian elementer dapat ditulis sebagai berikut:

$$(\lambda \ominus a_{11})(\lambda \ominus a_{22})(\lambda \ominus a_{33}) = \lambda^3 \ominus (a_{11} \oplus a_{22} \oplus a_{33})\lambda \oplus (a_{11}a_{22} \oplus a_{11}a_{33} \oplus a_{22}a_{33})\lambda \ominus a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$(\ominus a_{12})(\ominus a_{23})(\ominus a_{31}) = \ominus a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$(\ominus a_{13})(\ominus a_{21})(\ominus a_{32}) = \ominus a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\ominus \big((\lambda \ominus a_{11})(\ominus a_{23})(\ominus a_{32})\big) = \ominus a_{23}a_{32}\lambda \oplus a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\ominus \big((\ominus a_{12})(\ominus a_{21})(\lambda \ominus a_{33})\big) = \ominus a_{12}a_{21}\lambda \oplus a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\ominus \big((\ominus a_{13})(\lambda \ominus a_{22})(\ominus a_{31})\big) = \ominus a_{13}a_{31}\lambda \oplus a_{13}a_{22}a_{31}$$

Maka didapatkan polinomial karakteristik bertanda:

$$f_A^+(\lambda) = \lambda^3 \oplus (a_{11}a_{22} \oplus a_{11}a_{33} \oplus a_{22}a_{33})\lambda \oplus a_{11}a_{23}a_{32} \oplus a_{12}a_{21}a_{33} \oplus a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$f_A^-(\lambda) = (a_{11} \oplus a_{22} \oplus a_{33})\lambda^2 \oplus (a_{12}a_{21} \oplus a_{13}a_{31} \oplus a_{23}a_{32})\lambda \oplus a_{11}a_{22}a_{33} \oplus a_{12}a_{23}a_{31} \oplus a_{13}a_{21}a_{32} \qquad (4.7)$$

Jika diambil matriks $A \in M_n(R)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ e & 4 & 1 \\ 2^v & 5 & e \end{bmatrix}$$

Maka polinomial karakteristik bertanda dari matriks A adalah

$$|\lambda I \ominus A| = \begin{vmatrix} \lambda \ominus 1 & \ominus 3 & \ominus 2 \\ \ominus e & \lambda \ominus 4 & \ominus 1 \\ \ominus 2^{\nu} & \ominus 5 & \lambda \ominus e \end{vmatrix}$$

$|\lambda I \ominus A| =$

$((\lambda \ominus 1)(\lambda \ominus 4)(\lambda \ominus 0)) \oplus \left((\ominus 3)(\ominus 1)(\ominus 2^{\nu})\right) \oplus ((\ominus 2)(\ominus e)(\ominus 5))$

$\ominus\, ((\lambda \ominus 1)(\ominus 1)(\ominus 5) \ominus \left((\ominus 3)(\ominus e)(\lambda \ominus e)\right)$

$\ominus \left((\ominus 2)(\lambda \ominus 4)(\ominus 2^{\nu})\right)$

Dengan menggunakan persamaan 4.7 hasil perkalian bertanda genap dan hasil perkalian bertanda ganjil adalah:

$f_A^{+}(\lambda) = \lambda^3 \oplus (5 \oplus 1 \oplus 4)\lambda \oplus (7 \oplus 3 \oplus 8^{\nu}) = \lambda^3 \oplus 5\lambda \oplus 8^{\nu}$

$f_A^{-}(\lambda) = \lambda^2 \oplus (3 \oplus 4^{\nu} \oplus 6)\lambda \oplus (5 \oplus 6^{\nu} \oplus 7) = 4\lambda^2 \oplus 6\lambda \oplus 7$

Berdasarkan definisi 4.1.6 maka polinomial karakteristik menjadi:

$$f_A^{+}(\lambda) = f_A^{-}(\lambda)$$

$$\lambda^3 \oplus 5\lambda \oplus 8^{\nu} = 4\lambda^2 \oplus 6\lambda \oplus 7$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 \oplus 8^{\nu} = 4\lambda^2 \oplus 6\lambda$$

selanjutnya, substitusikan matriks A

$$A^3 \oplus 8^{\nu} \otimes I = 4 \otimes A^2 \oplus 6 \otimes A$$

$$\begin{bmatrix} 7^{\nu} & 11^{\nu} & 8^{\nu} \\ 8 & 12 & 9 \\ 9 & 13 & 10 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 8^{\nu} & å & \varepsilon \\ \varepsilon & 8^{\nu} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{\nu} & 11^{\nu} & 8 \\ 8 & 12 & 9 \\ 9 & 13 & 10 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 6 & 10 & 7 \\ 8^{\nu} & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8^{\nu} & 11^{\nu} & 8^{\nu} \\ 8 & 12 & 9 \\ 9 & 13 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^{\nu} & 11^{\nu} & 8^{\nu} \\ 8 & 12 & 9 \\ 9 & 13 & 10 \end{bmatrix}$$

◊

Dengan cara yang sama diberikan contoh untuk matriks berukuran 4×4.

Contoh 4.3

Diberikan matriks $A = (a_{i,j})$ berukuruan 4×4 dengan $a_{i,j} \in R$. Maka

$$\lambda \otimes I_R \ominus A = \begin{bmatrix} \lambda \ominus a_{11} & \ominus a_{12} & \ominus a_{13} & \ominus a_{14} \\ \ominus a_{21} & \lambda \ominus a_{22} & \ominus a_{23} & \ominus a_{24} \\ \ominus a_{31} & \ominus a_{32} & \lambda \ominus a_{33} & \ominus a_{34} \\ \ominus a_{41} & \ominus a_{42} & \ominus a_{43} & \lambda \ominus a_{44} \end{bmatrix}$$

Didapatkan polinomial karakteristik bertanda sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_A^+(\lambda) = {} & \lambda^4 \oplus (a_{11}a_{22} \oplus a_{11}a_{33} \oplus a_{11}a_{44} \oplus a_{22}a_{33} \oplus a_{22}a_{44} \oplus a_{33}a_{44}) \\ & \lambda^2 \oplus (a_{11}a_{23}a_{32} \oplus a_{11}a_{24}a_{42} \oplus a_{11}a_{34}a_{43} \oplus a_{12}a_{21}a_{33}a_{12}a_{21} \\ & a_{44} \oplus a_{13}a_{22}a_{31} \oplus a_{13}a_{31}a_{44} \oplus a_{14}a_{22}a_{41} \oplus a_{14}a_{33}a_{41} \oplus a_{22} \\ & a_{34}a_{43} \oplus a_{23}a_{32}a_{44} \oplus a_{24}a_{33}a_{42})\lambda \oplus a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \oplus a_{11}a_{23} \\ & a_{34}a_{42} \oplus a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \oplus a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \oplus a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \oplus a_{12} \\ & a_{24}a_{33}a_{41} \oplus a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \oplus a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \oplus a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & \oplus a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \oplus a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \oplus a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_A^-(\lambda) = {} & (a_{11} \oplus a_{22} \oplus a_{33} \oplus a_{44})\lambda^3 \oplus (a_{12}a_{21} \oplus a_{13}a_{31} \oplus a_{14}a_{41} \\ & \oplus a_{23}a_{32} \oplus a_{24}a_{42} \oplus a_{34}a_{43})\lambda^2 \oplus (a_{11}a_{22}a_{33} \oplus a_{11}a_{22}a_{44} \oplus \\ & a_{11}a_{33}a_{44} \oplus a_{12}a_{23}a_{31} \oplus a_{12}a_{24}a_{41} \oplus a_{13}a_{21}a_{32} \oplus a_{13}a_{34}a_{41} \oplus \\ & a_{14}a_{21}a_{42} \oplus a_{14}a_{31}a_{43} \oplus a_{22}a_{33}a_{44} \oplus a_{23}a_{34}a_{42} \oplus a_{24}a_{32}a_{43})\lambda \\ & \oplus a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \oplus a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \oplus a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \oplus a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} \\ & \oplus a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \oplus a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \oplus a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} \oplus a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\ & \oplus a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \oplus a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} \oplus a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \oplus a_{14}a_{23}a_{31}a_{4}. \end{aligned}$$

Jika diambil matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^v & -6 \\ e & 1 & 4 & 2 \\ e & 1 & 2 & 5 \\ 3^v & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka polinomial karakteristik bertanda adalah

$$\begin{aligned} f_A^+(\lambda) = {} & \lambda^4 \oplus (2 \oplus 2^v \oplus -3^v \oplus 5 \oplus 3 \oplus 3)\lambda^2 \\ & \oplus (6 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 3 \oplus 4^v \oplus 3^v \oplus -2^v \oplus -1^v \oplus 4 \oplus 6 \oplus 5)\lambda \\ & \oplus 5 \oplus 11 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 8^v \oplus 4^v \oplus 11^v \oplus 5^v \oplus -3 \oplus -7 \oplus 2^v \\ = {} & \lambda^4 \oplus 3^v\lambda^2 \oplus 6^v\lambda \oplus 11^v \end{aligned}$$

$$f_A^-(\lambda) = 2\lambda^3 \oplus (2 \oplus 2^\nu \oplus -3^\nu \oplus 5 \oplus 3 \oplus 3)\lambda^2 \oplus (4 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 6 \oplus 7^\nu \oplus 3^\nu \oplus 10^\nu \oplus -5 \oplus -8 \oplus 4 \oplus 10 \oplus 1)\lambda \oplus 5 \oplus 7 \oplus 6 \oplus 5 \oplus 14^\nu \oplus 2 \oplus 8^\nu \oplus 4^\nu \oplus 8^\nu \oplus -7 \oplus e^\nu \oplus -1$$
$$= 2\lambda^3 \oplus 5\lambda^2 \oplus 10^\nu\lambda \oplus 14^\nu$$

Berdasarkan definisi 4.1.5 maka polinomial karakteristik menjadi:

$$\lambda^4 \oplus 3^\nu\lambda^2 \oplus 6^\nu\lambda \oplus 11^\nu = 2\lambda^3 \oplus 5\lambda^2 \oplus 10^\nu\lambda \oplus 14^\nu$$
$$\Leftrightarrow \lambda^4 = 2\lambda^3 \oplus 5\lambda^2 \oplus 10^\nu\lambda \oplus 14^\nu$$

Selanjutnya, substitusikan matriks A

$A^4 = 2A^3 \oplus 5A^2 \oplus 10^\nu A \oplus 14^\nu$

$$\begin{bmatrix} 14^\nu & 12^\nu & 12^\nu & 13 \\ 13^\nu & 14^\nu & 14^\nu & 14 \\ 13^\nu & 14^\nu & 14^\nu & 14 \\ 13^\nu & 11^\nu & 11^\nu & 14^\nu \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 10^\nu & 8^\nu & 8 & 11 \\ 12^\nu & 10 & 9 & 11 \\ 10^\nu & 10^\nu & 10^\nu & 10 \\ 6^\nu & 6^\nu & 9^\nu & 10^\nu \end{bmatrix} \oplus 5\begin{bmatrix} 2^\nu & 3^\nu & 6 & 7^\nu \\ 5^\nu & 5 & 6 & 9 \\ 8^\nu & 6 & 5 & 7 \\ 4^\nu & 5^\nu & 5^\nu & 3^\nu \end{bmatrix}$$
$$\oplus 10^\nu\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^\nu & -6 \\ e & 1 & 4 & 2 \\ e & 1 & 2 & 5 \\ 3^\nu & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 14^\nu & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 14^\nu & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 14^\nu & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14^\nu \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14^\nu & 12^\nu & 12^\nu & 13 \\ 13^\nu & 14^\nu & 14^\nu & 14 \\ 13^\nu & 14^\nu & 14^\nu & 14 \\ 13^\nu & 11^\nu & 11^\nu & 14^\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12^\nu & 10^\nu & 10 & 13 \\ 14^\nu & 12 & 11 & 13 \\ 12^\nu & 12^\nu & 12^\nu & 12 \\ 8^\nu & 8^\nu & 11^\nu & 12^\nu \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 7^\nu & 8^\nu & 11 & 12^\nu \\ 10^\nu & 10 & 11 & 14 \\ 13^\nu & 11 & 10 & 12 \\ 9^\nu & 10^\nu & 10^\nu & 8^\nu \end{bmatrix}$$
$$\oplus \begin{bmatrix} 11^\nu & 12^\nu & 12^\nu & 4^\nu \\ 10^\nu & 11^\nu & 14^\nu & 12^\nu \\ 10^\nu & 11^\nu & 12^\nu & 15^\nu \\ 13^\nu & 11^\nu & 8^\nu & 11^\nu \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 14^\nu & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 14^\nu & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 14^\nu & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 14^\nu \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14^\nu & 12^\nu & 12^\nu & 13 \\ 14^\nu & 14^\nu & 14^\nu & 14 \\ 13^\nu & 12^\nu & 14^\nu & 15^\nu \\ 13^\nu & 11^\nu & 11^\nu & 14^\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14^\nu & 12^\nu & 12^\nu & 13 \\ 14^\nu & 14^\nu & 14^\nu & 14 \\ 13^\nu & 12^\nu & 14^\nu & 15^\nu \\ 13^\nu & 11^\nu & 11^\nu & 14^\nu \end{bmatrix} \qquad \lozenge$$

Akan ditunjukkan cara mencari polinomial karakteristik *supertropical* dengan menggunakan hasil permutasi matriks tidak bertanda berukuran 3×3.

Contoh 4.4

Diberikan matriks A berukuran 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Berikut merupakan daftar hasil permutasi dari $(\lambda I_R \oplus A)$ ditunjukkan pada tabel 4.2 berikut:

Tabel. 4.2 hasil permutasi matriks $(\lambda I_R \oplus A_3)$

	$\lvert\sigma\rvert$	dom σ	Permutasi	$\otimes_{i=1}^{n} (a_{i\sigma(i)})$
x^3	$n = 0$			
x^2	$n = 1$	(1)	(1)	a_{11}
		(2)	(2)	a_{22}
		(3)	(3)	a_{33}
x^1	$n = 2$	$(1,2)$	(1,2)	$a_{11} \otimes a_{22}$
			(2,1)	$(a_{12} \otimes a_{21})$
		$(1,3)$	(1,3)	$a_{11} \otimes a_{33}$
			(3,1)	$(a_{13} \otimes a_{31})$
		$(2,3)$	(2,3)	$a_{22} \otimes a_{33}$
			(3,2)	$(a_{23} \otimes a_{32})$
x^0	$n = 3$	$(1,2,3)$	(1,2,3)	$a_{11} \otimes a_{22} \otimes a_{33}$
			(1,3,2)	$(a_{11} \otimes a_{23} \otimes a_{32})$
			(2,3,1)	$a_{12} \otimes a_{23} \otimes a_{31}$
			(2,1,3)	$(a_{12} \otimes a_{21} \otimes a_{33})$
			(3,1,2)	$(a_{13} \otimes a_{21} \otimes a_{32})$
			(3,2,1)	$(a_{13} \otimes a_{22} \otimes a_{31})$

Didapat polinomial karakteristik berdasarkan definisi 2.19 yaitu $f_A(\lambda) = |\lambda I_R \oplus A|$ dengan tanpa memperhatikan dari $A \in M_3$ adalah:

$$f_A(\lambda) = \lambda^n \oplus \left(\bigoplus_{i \in \underline{n}} \alpha_i \otimes A^{\otimes n-i} \right)$$

$f_A(\lambda) = \lambda^n \oplus \alpha_1\lambda^{n-1} \oplus \alpha_2\lambda^{n-2} \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1}\lambda \oplus \alpha_n$

$$f_A(\lambda) = \lambda^3 \oplus (a_{11} \oplus a_{22} \oplus a_{33}) \otimes \lambda^2 \oplus ((a_{11}a_{22}) \oplus (a_{12}a_{21}) \oplus (a_{11}a_{33}) \oplus (a_{13}a_{31}) \oplus (a_{22}a_{33}) \oplus (a_{23}a_{32}))\lambda \oplus (a_{11}a_{22}a_{33}) \oplus (a_{12}a_{23}a_{31}) \oplus (a_{13}a_{22}a_{31}) \oplus (a_{11}a_{23}a_{32})(a_{12}a_{21}a_{33}) \oplus (a_{13}a_{32}a_{31}) \qquad \Diamond$$

Berdasarkan dari hasil diatas untuk mencari koefisien pada λ^2 bisa dicari dengan menentukan trace dari matriks A, untuk mencari koefisien pada λ bisa didapatkan dari $M_{11} \oplus M_{22} \oplus M_{33}$ yang merupakan matriks minor dari diagonal matriks dan untuk mencari koefisien λ^0 bisa didapatkan dari determinan matriks A. Sehingga polinomial karakteristik dari suatu matriks A berukuran 3×3 atas aljabar *supertropical* bisa ditentukan dengan

$$f_A(\lambda) = \lambda^3 \oplus \text{trace (A)} \otimes \lambda^2 \oplus (M_{11} \oplus M_{22} \oplus M_{33}) \otimes \lambda \oplus |A| \qquad (4.8)$$

Contoh 4.5

Dengan menggunakan matriks A dari contoh 4.2 akan dicari polinomial karakteristik dengan menggunakan hasil permutasi dari matriks $(\lambda \otimes I_R \oplus A)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ e & 4 & 1 \\ 2^\nu & 5 & e \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \lambda^{\otimes 3} \oplus \text{trace (A)} \otimes \lambda^{\otimes 2} \oplus (M_{11} \oplus M_{22} \oplus M_{33}) \otimes \lambda \oplus |A| \\ &= \lambda^{\otimes 3} \oplus (1 \oplus 4 \oplus e) \otimes \lambda^{\otimes 2} \oplus (6 \oplus 4^\nu \oplus 5) \otimes \lambda \oplus 8^\nu \\ &= \lambda^{\otimes 3} \oplus 4 \otimes \lambda^{\otimes 2} \oplus 6 \otimes \lambda \oplus 8^\nu \qquad \Diamond \end{aligned}$$

Teorema 4.1.7 Cayley-Hamilton

Suatu matriks $A \in M_n(R)$ memenuhi persamaan karakteristik $f_A(A) \vDash_{gs} [0_R]$

■

Bukti

Diberikan $B = f_A(A) = A^{\otimes n} \oplus \left(\bigoplus_{i\in\underline{n}} \alpha_i \otimes A^{\otimes n-i}\right)$ dengan $\underline{n} = \{1,2,\dots,n\}$ dimana elemen matriks B pada baris ke-i kolom ke-j dinotasikan $b_{i,j}$. Akan dibuktikan bahwa $B \in M_n(\mathcal{G}_0)$ yang berarti setiap elemen $b_{i,j}$ adalah ghost. Berdasarkan definisi (2.19) yaitu polinomial karakteristik *supertropical* $f_A(\lambda) = \det(\lambda \otimes I_R \oplus A)$ maka persamaan karakteristik bertanda dari definisi (4.1.5) yaitu $f_A^+(\lambda) = f_A^-(\lambda)$ menjadi $f_A(\lambda) = f_A^+(\lambda) \oplus f_A^-(\lambda)$ karena $f_A^+(A) = f_A^-(A)$ maka ketika mensubstitusikan matriks A didapatkan $f_A(A) = f_A^+(A) \oplus f_A^+(A)$ sehingga matriks $\left(f_A(A)\right)^v = B$ atau $B \in M_n(\mathcal{G}_0)$.

Contoh 4.6

Diberikan suatu matriks $A \in M_2(R)$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dimana $\forall a_{ij} \in R$. Akan dicari matriks $B = f_A(A)$, untuk polinomial karakteristik dari A adalah:

$$f_A(\lambda) = \lambda^n \oplus \left(\bigoplus_{i\in\underline{n}} \alpha_i \otimes A^{\otimes n-i}\right)$$

$$\Leftrightarrow f_A(\lambda) = \lambda^2 \oplus (a_{11} \oplus a_{22}) \otimes \lambda \oplus |A|$$

$$f_A(A) = A^2 \oplus (a_{11} \oplus a_{22}) \otimes A \oplus |A| \otimes I_R$$

Didapat:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2 \otimes a_{11}) \oplus (a_{12} \otimes a_{21}) & a_{12} \otimes (a_{11} \oplus a_{22}) \\ a_{21} \otimes (a_{11} \oplus a_{22}) & (a_{12} \otimes a_{21}) \otimes (2 \otimes a_{22}) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, $B = A^2 \oplus (a_{11} \oplus a_{22}) \otimes A \oplus |A| \otimes I_R$

$$\begin{bmatrix} (2 \otimes a_{11}) \oplus (a_{12} \otimes a_{21}) & a_{12} \otimes (a_{11} \oplus a_{22}) \\ a_{21} \otimes (a_{11} \oplus a_{22}) & (a_{12} \otimes a_{21}) \otimes (2 \otimes a_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\oplus (a_{11} \oplus a_{22}) \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \oplus (a_{11} \otimes a_{22}) \oplus (a_{12} \otimes a_{21}) \otimes \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} (2 \otimes a_{11}) \oplus (a_{12} \otimes a_{21}) & a_{12} \otimes (a_{11} \oplus a_{22}) \\ a_{21} \otimes (a_{11} \oplus a_{22}) & (a_{12} \otimes a_{21}) \oplus (2 \otimes a_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\oplus\begin{bmatrix}(2\otimes a_{11})\oplus(a_{11}\otimes a_{22}) & a_{12}\otimes(a_{11}\oplus a_{22})\\ a_{21}\otimes(a_{11}\oplus a_{22}) & (a_{11}\otimes a_{22})\otimes(2\otimes a_{22})\end{bmatrix}$$
$$\oplus\begin{bmatrix}(a_{11}\otimes a_{22})\oplus(a_{12}\otimes a_{21}) & \varepsilon\\ \varepsilon & (a_{11}\otimes a_{22})\oplus(a_{12}\otimes a_{21})\end{bmatrix}$$

Berdasarkan definisi *supertropicality* yaitu $a \oplus a = a^{\nu}$, maka untuk setiap elemen matriks B menjadi:

$b_{11} = (2\otimes a_{11})^{\nu} \oplus (a_{11}\otimes a_{22})^{\nu} \oplus (\, a_{12}\otimes a_{21})^{\nu}$

$b_{12} = (a_{12}\otimes a_{11})^{\nu} \oplus (a_{11}\otimes a_{22})^{\nu}$

$b_{21} = (a_{21}\otimes a_{11})^{\nu} \oplus (a_{11}\otimes a_{22})^{\nu}$

$b_{22} = (a_{11}\otimes a_{22})^{\nu} \oplus (a_{12}\otimes a_{21})^{\nu} \oplus (2\otimes a_{22})^{\nu}$

hasil matriks tersebut terlihat bahwa $\forall b_{i,j} \in \mathcal{G}_0$ maka matriks $B \in M_n(\mathcal{G}_0)$.

◊

Contoh 4.7

Berdasarkan contoh 4.2 maka $f_A(\lambda) = f_A^{+}(\lambda) \oplus f_A^{-}(\lambda)$

$$\lambda^3 \oplus 4\lambda^2 \oplus 6\lambda \oplus 8^{\nu} = (\lambda^3 \oplus 5\lambda \oplus 8^{\nu}) \oplus (4\lambda^2 \oplus 6\lambda \oplus 7)$$

Dengan mensubstitusikan matriks A kedalam persamaan $f_A(\lambda)$ didapat:

$$f_A(A) = \begin{bmatrix}8^{\nu} & 11^{\nu} & 8^{\nu}\\ 8 & 12 & 9\\ 9 & 13 & 10\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}8^{\nu} & 11^{\nu} & 8^{\nu}\\ 8 & 12 & 9\\ 9 & 13 & 10\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}8^{\nu} & 11^{\nu} & 8^{\nu}\\ 8^{\nu} & 12^{\nu} & 9^{\nu}\\ 9^{\nu} & 13^{\nu} & 10^{\nu}\end{bmatrix}$$ ◊

4.2 Teorema Cayley-Hamilton untuk Mencari Invers Matriks

Telah dijelaskan sebelumnya pada definisi 2.17 bahwa suatu matriks $A \in M_n(R)$ dikatakan *invertible* atas aljabar *supertropical* jika terdapat matriks $B \in M_n(R)$ sehingga memenuhi $A \otimes B = I_R$ dimana B disini disebut invers kanan dan memenuhi $B \otimes A = I_R$ dimana B disini disebut invers kiri dari A.

Lemma 4.2.1

Matriks A adalah matriks *invertible* yang memenuhi $A \otimes B = B \otimes A = I$ jika dan hanya jika A adalah matriks diagonal $[D]_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a \in T, \text{untuk } i = j \\ \varepsilon, \text{ untuk} i \neq j \end{cases}$ dan invers dari A adalah

$$A^{\otimes -1} = \begin{bmatrix} d_1^{\otimes -1} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2^{\otimes -1} & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & d_n^{\otimes -1} \end{bmatrix}$$

Untuk semua $d_{i,i}$ dengan $i = 1,2, \dots, n$ adalah elemen dari diagonal A.

Bukti

Jika A adalah matriks diagonal, dengan

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

invers dari A diberikan oleh $A^{\otimes -1}$ sebab $A \otimes A^{\otimes -1} = A^{\otimes -1} \otimes A = I$. Sebaliknya jika invers dari A adalah

$$A^{\otimes -1} = \begin{bmatrix} d_1^{\otimes -1} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2^{\otimes -1} & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & d_n^{\otimes -1} \end{bmatrix} \text{dan misalkan } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \varepsilon & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Misal $B = A \otimes A^{\otimes -1}$, didapat

$$A \otimes A^{\otimes -1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \varepsilon & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & a_n \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} d_1^{\otimes -1} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2^{\otimes -1} & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & d_n^{\otimes -1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} \otimes d_1^{\otimes -1}) & (a_{12} \otimes d_2^{\otimes -1}) & \dots & (a_{1n} \otimes d_n^{\otimes -1}) \\ \varepsilon & (a_{22} \otimes d_2^{\otimes -1}) & \dots & (a_{2n} \otimes d_n^{\otimes -1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & (a_{nn} \otimes d_n^{\otimes -1}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & (a_{12} \otimes d_2^{\otimes -1}) & \dots & (a_{1n} \otimes d_n^{\otimes -1}) \\ \varepsilon & e & \dots & (a_{2n} \otimes d_n^{\otimes -1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & e \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} e & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ \varepsilon & e & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & e \end{bmatrix} \neq I \in U_n(R)$$

■

Berkaitan dengan invers matriks teorema Cayley-Hamilton menyatakan bahwa suatu matriks $A \in M_n(R)$ memenuhi polinomial karakteristik $f_A(A) \vDash_{gs} [0_R]$ sehingga matriks $f_A(A)$ adalah matriks ghost. Maka berdasarkan Lemma 4.2.1 invers matriks bisa ditentukan dari teorema Cayley-Hamilton dengan cara sebagai berikut

$$f_A(A) \in M_n(\mathcal{G}_0)$$

$$A^{\otimes n} \oplus \alpha_1 \otimes A^{\otimes n-1} \oplus \alpha_2 \otimes A^{\otimes n-2} \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1} \otimes A \oplus \alpha_n \otimes I_R \in M_n(\mathcal{G}_0)$$

misalkan $B = A^{\otimes -1}$ dengan

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & b_{2,2} & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Maka persamaan menjadi

$$A^{\otimes n} \otimes A^{\otimes -1} \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1} \otimes A \otimes A^{\otimes -1} \oplus \alpha_n \otimes B \otimes I_R \in M_n(\mathcal{G}_0)$$

$$\Leftrightarrow A^{\otimes n-1} \oplus \alpha_1 \otimes A^{n-2} \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1} \otimes I_R \oplus \alpha_n \otimes B \otimes I_R \in M_n(\mathcal{G}_0)$$

Sehingga didapatkan persamaan baru untuk menentukan invers matriks dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton yaitu

$$A^{\otimes n-1} \oplus \alpha_1 \otimes A^{n-2} \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1} \otimes I_R \oplus \alpha_n \otimes B \otimes I_R \in M_n(\mathcal{G}_0) \qquad (4.9)$$

Contoh 4.8

Diberikan matriks $A \in M_3(R)$, yaitu $A = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix}$ dengan $|A| = 9$

Didapat

$$f_A(\lambda) = \lambda^3 \oplus 4 \otimes \lambda^2 \oplus 7 \otimes \lambda \oplus 9$$

$$A^{\otimes -1} = A^2 \oplus 4 \otimes A^1 \oplus 7 \otimes I_R \oplus 9 \otimes B \in M_n(\mathcal{G}_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix}^{\otimes 2} \oplus 4 \otimes \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \oplus 7 \otimes \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus$$

$$9 \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & b_{22} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & b_{33} \end{bmatrix} \in M_n(\mathcal{G}_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 \end{bmatrix} \oplus$$

$$\begin{bmatrix} 9 \otimes b_{11} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 9 \otimes b_{22} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 9 \otimes b_{33} \end{bmatrix} \in M_n(\mathcal{G}_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 7^v & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 9 \otimes b_{11} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 9 \otimes b_{22} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 9 \otimes b_{33} \end{bmatrix} \in M_n(\mathcal{G}_0)$$

karena matriks $f_A(A) \vDash_{gs} [0_R]$ atau matriks $f_A(A) \in \mathcal{G}_0$ maka b_{ii} memenuhi:

$$b_{11} \preccurlyeq_v -2 \qquad b_{12} = \varepsilon \qquad b_{13} = \varepsilon$$

$$b_{21} = \varepsilon \qquad b_{22} = -2 \qquad b_{23} = \varepsilon$$

$$b_{31} = \varepsilon \qquad b_{32} = \varepsilon \qquad b_{33} \preccurlyeq_v -1$$

Selanjutnya berdasarkan Lemma 4.2.1 maka untuk elemen b_{11} dan b_{33} harus ditentukan supaya menghasilkan $1_R = e$, didapat $b_{11} = -3$ dan $b_{33} = -4$. Maka didapat matrik B sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix}$$

Cek untuk matriks B:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} -3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat matriks $B = \begin{bmatrix} -3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix}$ sebagai invers kanan sekaligus invers kiri dari A. ◊

Definisi 4.2.2

Jika terdapat suatu permutasi $\sigma \in S_n$ maka matriks permutasi adalah matriks persegi $P_\sigma = [p_{i,j}]$ yang didefinisikan dengan:

$$p_{i,j} = \begin{cases} e: & j = \sigma(i) \\ \varepsilon: & j \neq \sigma(i) \end{cases}$$

Suatu matriks $A \in M_n(R)$ atas aljabar *supertropical* dikatakan *invertible* jika dan hanya jika matriks A adalah hasil kali matriks diagonal D dengan suatu matriks permutasi P_σ.

Contoh 4.9

Diberikan matriks $A \in M_4(\mathcal{T})$ dan matriks P_σ, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix} \text{ dan } P_\sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

dengan melakukan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama didapat $|A| = 21$. Matriks A merupakan matriks diagonal yang dipermutasi oleh P_σ, maka untuk mencari matriks $D_A = P_\sigma \otimes A$

$$D_A = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat matriks D_A sebagai berikut

$$D_A = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix}$$

Didapatkan polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$f_A(\lambda) = \lambda \oplus 8 \otimes \lambda^{\otimes 3} \oplus 15 \otimes \lambda^2 \oplus 19 \otimes \lambda \oplus 21$$

$$A^{\otimes -1} = A^{\otimes 3} \oplus 8 \otimes A^{\otimes 2} \oplus 15 \otimes A^{\otimes 1} \oplus 19 \otimes I_R \oplus 21 \otimes B \in M_n(\mathcal{G}_0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 21 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 24 \end{bmatrix} \oplus 8 \otimes \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 8 & \varepsilon & \varepsilon \\ å & \varepsilon & 14 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 16 \end{bmatrix} \oplus 15 \otimes \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix}$$

$$\oplus 19 \otimes \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \oplus 21 \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & b_{22} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & b_{33} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & b_{44} \end{bmatrix} \in M_n(\mathcal{G}_0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 21 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 24 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 14 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 16 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 22 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 24 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 17 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 19 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 22 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 23 \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} 19 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 19 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 19 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 19 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 21 \otimes b_{11} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 21 \otimes b_{22} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 21 \otimes b_{33} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21 \otimes b_{11} \end{bmatrix}$$
$$\in M_n(\mathcal{G}_0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 19 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 19^v & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 22^v & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 24^v \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 21 \otimes b_{11} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 21 \otimes b_{22} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 21 \otimes b_{33} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 21 \otimes b_{11} \end{bmatrix}$$

karena matriks $f_A(A) \vDash_{gs} (0_R)$ atau matriks $f_A(A) \in \mathcal{G}_0$ maka b_{ii} memenuhi:

$b_{11} = -2$ $\quad b_{12} = \varepsilon$ $\quad b_{13} = \varepsilon$ $\quad b_{14} = \varepsilon$

$b_{21} = \varepsilon$ $\quad b_{22} \preccurlyeq_v -2$ $\quad b_{23} = \varepsilon$ $\quad b_{24} = \varepsilon$

$b_{31} = \varepsilon$ $\quad b_{32} = \varepsilon$ $\quad b_{33} \preccurlyeq_v 1$ $\quad b_{34} = \varepsilon$

$b_{41} = \varepsilon$ $\quad b_{24} = \varepsilon$ $\quad b_{34} = \varepsilon$ $\quad b_{44} \preccurlyeq_v 3$

Selanjutnya berdasarkan Lemma 4.2.1 maka untuk elemen b_{22}, b_{33} dan b_{44} harus ditentukan supaya menghasilkan $1_R = e$, didapat $b_{11} = -4$, $b_{33} = -7$ dan $b_{44} = -8$. Didapat matrik B sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -8 \end{bmatrix}$$

Cek untuk matriks B:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \text{å} & \varepsilon & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat matriks $B = \begin{bmatrix} -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -8 \end{bmatrix}$ sebagai invers kanan sekaligus invers kiri dari A.

◊

BAB 5
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Teorema Cayley-Hamilton berlaku pada aljabar *supertropical*. Keberlakuan teorema Cayley-Hamilton atas aljabar *supertropical* dapat dibuktikan melalui metode kombinatorik.

a. Pembuktian teorema Cayley-Hamilton atas aljabar *supertropical* dengan menggunakan metode kombinatorik dilakukan melalui tiga tahap, yaitu:
   1. Menentukan persamaan karakteristik bertanda $f_A^-(\lambda)$ dan $f_A^+(\lambda)$
   2. Memisahkan persamaan karakteristik bertanda sedemikian hingga $f_A^-(\lambda) = f_A^+(\lambda)$
   3. Menjumlahkan persamaan karakteristik bertanda $f_A^-(\lambda) \oplus f_A^+(\lambda)$

   selanjutnya, mensubstitusikan matriks A didapat $(f_A(A))^v$.

b. Teorema Cayley-Hamilton atas aljabar *supertropical* dapat digunakan untuk mencari invers matriks persegi dengan matriks berupa matriks diagonal.

5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah:

a. Dengan menggunakan pendekatan kombinatorik dapat dibuat program untuk menentukan persamaan karakteristik dari matriks persegi, sehingga dapat mempermudah penghitungan.

b. Hasil pembahasan pada tesis ini masih terbatas pada teorema Cayley-Hamilton saja, beberapa hal bisa dilakukan penelitian lebih lanjut pada akar-akar, nilai eigen dan pemfaktoran persamaan karakteristik atas aljabar *supertropical*.

DAFTAR PUSTAKA

Chung, Misoo., (1995), *Eigen Values and Eigenvectors in the Max-plus Algebra,* A Tesis of the University of Colorado at Denver.

Gaubert, S., (2006), Method and Applications of (max +) Linear Algebra. *HAL Id: inria-00073603*

Golan, J.S. (2003), *Semirings and affine equations over them: Theory and applications,* 1st edition, Springer-science+business Media, Netherlands.

Heidergott, B., Olsder, G.J. and Der Woude, J.V. (1999), *Max Plus at Work*, Princeton University Press.

Izhakian, Z. and Rowen, L. (2010), " A Guide to Supertropical Algebra", *Advances in Ring Theory*, Hal.283-302

Izhakian, Z. and Rowen, L. (2010), "Supertropical Algebra", *Advances in Mathematics*, Hal.2222-2286

Izhakian, Z. and Rowen. L. (2008), "Supertropical Matrix Algebra", *Arxiv:0806.1178v2[math.AC]*

Izhakian, Z. and Rowen. L. (2011a), "Supertropical Matrix Algebra", *Israel Journal Mathematics*, 182, hal.383-424

Izhakian, Zur., "Tropical Arithmetic and Tropical Matrix Algebra", arXiv:math/0505458v3(2008)

Litinov, G.L. (2005), "*The Maslov Dequantization, Idempotent and tropical Mathematics: a Brief Introduction*" arXiv: 0507014v1

Niv, A. (2015), "On Pseudo-Inverse of Matrices and their Characteristic Polynomials in Supertropical Algebra", *Linear Algebra and its Applications*, vol.471, hal. 264-290

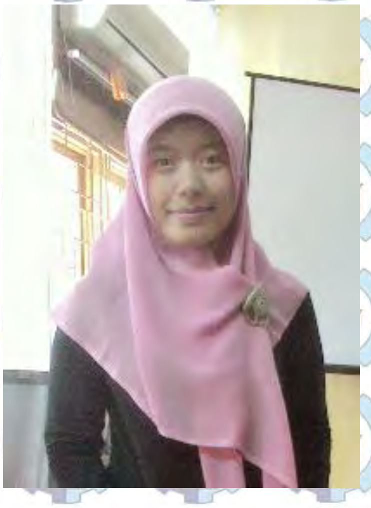
Olsder, G.J. and C. Roos, (1988), "Cramer and Cayley-Hamilton in the Max-Algebra", *Linear Algebra and its Applications*, vol.101, hal.87-108

Sangwan, P. and Verma, G,N. (2013), "Combinatorial Proof of Cayley-Hamilton Theorem", *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*.

Straubing, H. (1982), "A Combinatorial Proof of The Cayley-Hamilton Theorem", Discrete Mathematics 43 (1983), hal 273-279

Subiono, (2015), *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya versi 3.0.0*, Jurusan Matematika, ITS, Surabaya.

BIODATA PENULIS



Penulis bernama Suroyatul Isniah, lahir di Kab.Semarang, 28 Oktober 1990, merupakan anak pertama dari 4 bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di RA Raudhotul Athfal (1994-1996), MI Raudhotul Athfal (1996-2002), MTs Darul Ulum (2002-2005), MAN Suruh (2005-2008). Setelah lulus dari jenjang Sekolah Menengah Atas, penulis melanjutkan studi di Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan Matematika IAIN Walisongo Semarang (2008-2013) dengan NIM 083511027. Kemudian penulis melanjutkan studi magister di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan NRP 1214201012. Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: suroyatul90@gmail.com.